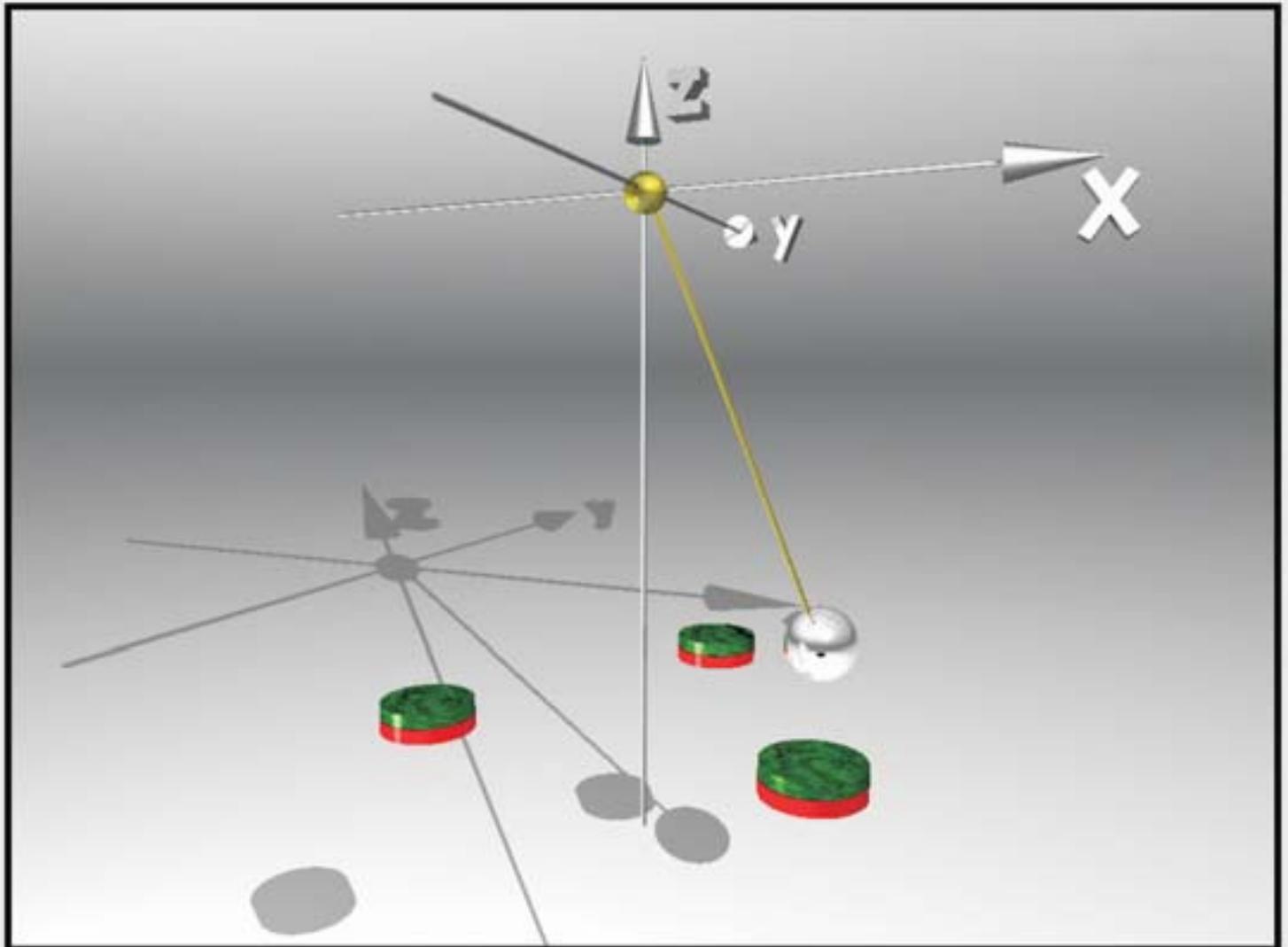


# Das Magnetpendel

Ein Beispiel des deterministischen Chaos



## Nichtlineare Dynamik

Der Übergang des Determinismus in den Zufall

## Die Computersimulation

Ein Hilfsmittel zur Analyse der nichtlinearen Dynamik

## Facharbeit

LK Physik

Dominik Leiner

1998

# Inhalt

(auch als Lesezeichen im Dokument)

## I. Einführung

---

- 1. Allgemeine Anmerkungen Seite 3
  - 1. Voraussetzungen an den Leser
  - 1. Physik
  - 2. Mathematik
  - 3. Programmierung
- 2. Was bedeutet "chaotisches Verhalten" Seite 4
- 3. Das Magnetpendel Seite 5
  - 1. Aufbau (praktisch)
  - 2. Beobachtungen beim echten Versuch (praktisch)
  - 3. Definitionen

## II. Physikalische Grundlagen

---

- 1. Verwendete Winkel Seite 7
- 2. Die Kräfte, die auf das Pendel wirken Seite 8
  - 1. Magnetismus
  - 2. Erdanziehung
  - 3. Zentripetalkraft durch die Aufhängung
  - 4. Reibung
  - 5. Störungen
- 3. Wirkung der Kräfte Seite 11
  - 1. Teilweise Kompensation durch die Aufhängung
  - 2. Die Auswirkung auf den Pendelzustand

## III. Eine Simulation am Computer

---

- 1. Die Programmierung einer Simulation Seite 15
  - 1. Das Prinzip einer Simulation
  - 2. Sinn und Zweck einer Computersimulation
  - 3. Vereinfachungen
  - 4. Genauigkeit
  - 5. Die Umsetzung der physikalischen Berechnungen
  - 6. Fehlerkorrektur
  - 7. Grafische Ausgabe & Analysen
- 2. Das Programm Seite 25
  - 1. Einheiten im Programm
  - 2. Bedienung des Programms

## IV. Ergebnisse des Programms und Analyse

---

- 1. Wie erklärt man die Ergebnisse in der Realität Seite 27
- 2. Sensitivität Seite 29
- 3. Analyse-Ansätze zur Beschreibung des Chaos Seite 32
  - 1. Regelmäßigkeiten im chaotischen Verhalten
  - 2. Datenreduktion
  - 3. Bahntypen und ihre Poincaré-Schnitte
- 4. Fraktale und Chaos Seite 41

## V. Anhang

---

- A. Anhang zum Programm Seite 44
  - A1. Fehler in der Berechnung
  - A2. Anmerkungen zur beiliegenden Diskette
  - A3. Zum realen Versuch
- B. Quellen Seite 49

## Kapitel I - Einführung

Das Layout dieser Arbeit wurde stark vom optischen Aspekt geleitet. Das hat zwar zu einem größeren Seitenumfang geführt, dennoch sollte es das wert gewesen sein...

### 1. Allgemeine Anmerkungen

#### 1. Voraussetzungen an den Leser

Da die Chaosforschung ein recht eigenständiges Kapitel der Mathematik beziehungsweise Physik ist, das zudem (in begrenztem Maße) auf einfachen mathematischen Grundlagen basiert, braucht der Leser dieser Arbeit keine besonderen Kenntnisse. Im Einzelnen bedeutet das:

##### Mathematik:

Der Leser sollte Grundwissen über Integration und die Anwendung von Sinus und Kosinus mitbringen. Ansonsten werden nur einfache Rechnungen angewandt.

##### Physik:

Es mag ungewohnt klingen, aber in dieser Physik-Facharbeit brauchen Sie nur rudimentäre Kenntnisse physikalischer Gesetzmäßigkeiten. Dazu gehören Magnetismus und einfache Mechanik, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Flieh- und Zentripetalkräfte, Reibung und die Aufteilung einzelner Kräfte im Kraftparallelogramm.

##### Programmierung:

Für den programmiertechnischen Teil dieser Arbeit (Kapitel III) sollten zumindest die Standardbefehle der Programmiersprache Pascal sowie einfache objektorientierte Programmierung bekannt sein. Für ein vollständiges Verständnis des gesamten Programms<sup>Disk</sup> sollten Sie Delphi 1.0 beherrschen.

## 2. Was bedeutet "chaotisches Verhalten"

Das Chaos hebt die Grenzen zwischen dem deterministisch Gesetzmäßigen und dem Zufall auf.

Pn1 Seite 12

Ein Versuch mit exakt bestimmten Ausgangs- und Umgebungsbedingungen hat immer das selbe Ergebnis. Diese Tatsache bezeichnet man kurz als schwache Kausalität Det Seite 32.

Stellt man das in einer Grafik anschaulich dar, wobei man die Ursache auf eine Ebene legt und die Wirkung auf eine andere, so sieht das Ergebnis aus, wie folgt:

Einer bestimmten Ursache wird eine bestimmte Wirkung zugeordnet.

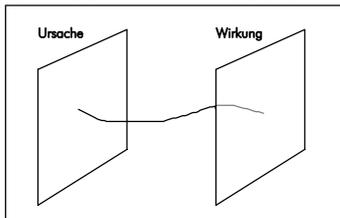


Bild 1.2a

Diese Form der Darstellung ist aus Det Seite 32 übernommen, da sie meiner Meinung nach das Phänomen von Kausalität und chaotischem Verhalten sehr anschaulich darstellen kann.

Aus unserer Umwelt sind wir es gewohnt, dass bei ähnlichen Ausgangsbedingungen ebenfalls ein ähnliches Ergebnis zu erwarten ist. Betrachtet man ein einfaches Pendel, so ist es für den Bahnverlauf relativ unerheblich, ob das Pendel an einem Startpunkt A oder in dessen Nähe, von Startpunkt B aus - mit einem kleinen Schubs nach rechts - losgelassen wird (siehe Bild 1.2c). Das Ergebnis B' weicht kaum von A' ab. Wenn das zutrifft, so spricht man von starker Kausalität:

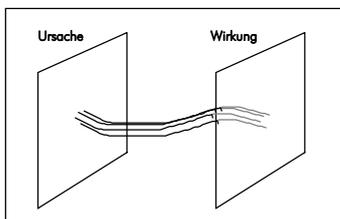


Bild 1.2b

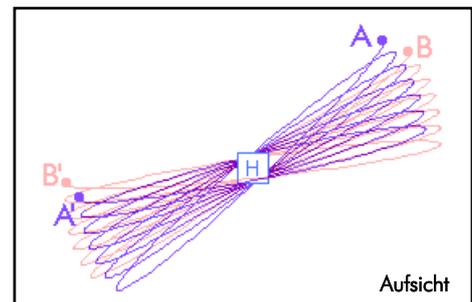


Bild 1.2c

Diese starke Kausalität trifft aber nicht für alle physikalischen Versuche zu. Als Beispiel dafür lege ich einfach zwei Magnete unter das Pendel und lasse es von den selben Punkten A und B starten. Dadurch entstehen zwei völlig unterschiedliche Bahnen.

Wenn die starke Kausalität verletzt wird, so spricht man allgemein von chaotischem Verhalten. Hier haben ähnliche Ursachen nicht mehr ähnliche Wirkungen, sondern bereits eine kleine Änderung der Bedingungen kann zu einem völlig anderen Ergebnis führen:

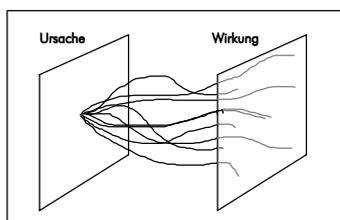


Bild 1.2d

Wenn Sie sich das Bild 1.2d einprägen, dann haben Sie eine anschauliche Idee von chaotischem Verhalten.

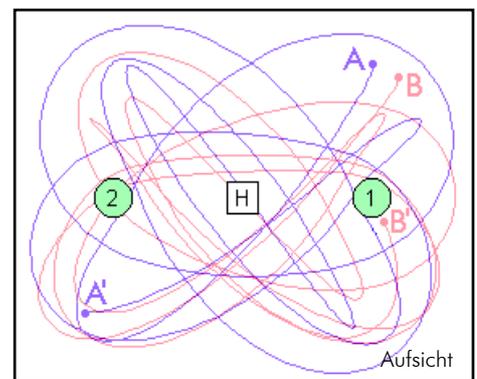


Bild 1.2e

### 3. Das Magnetpendel

Im Kapitel I.2 habe ich das chaotische Verhalten - im Gegensatz zu einem stark kausal bestimmten Verhalten - anhand eines Pendels veranschaulicht. Das Pendel, das ich verwendet habe ist hier mit einem Raytracer nachgebildet (Bild I.3a), zum echten Versuchsaufbau finden Sie Informationen im Anhang A3.

#### 1. Aufbau

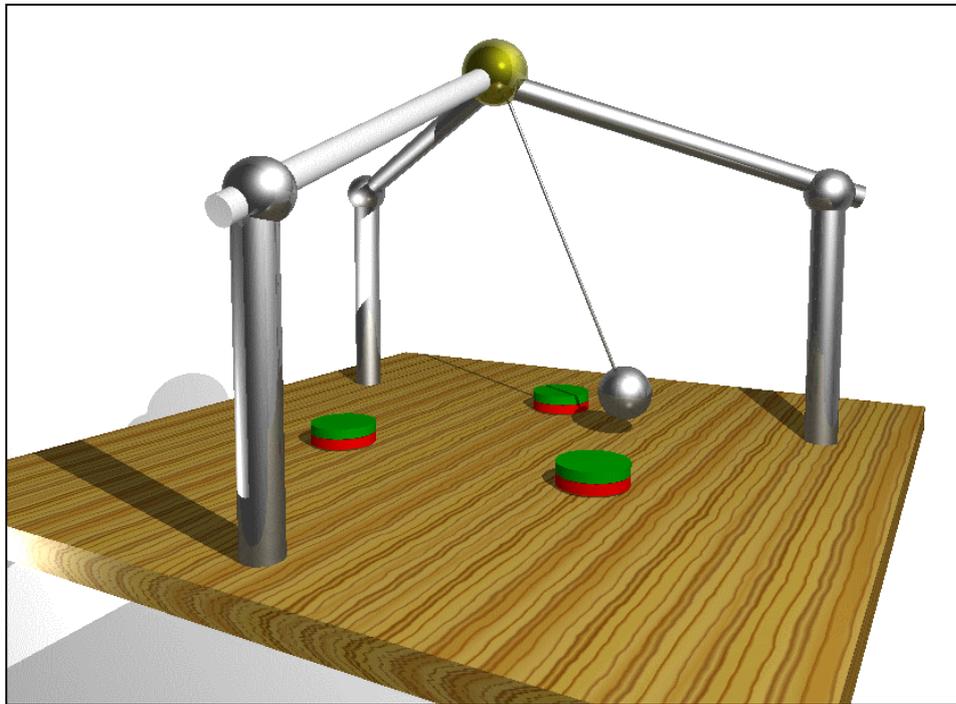


Bild I.3a

An einer Aufhängung ist reibungsfrei ein Stab mit einer Weicheisen-Kugel befestigt. Darunter befinden sich zwei oder mehr Magnete.

Es besteht die Möglichkeit, dass anstatt der Kugel ein Magnet verwendet wird. Damit kann wahlweise auch eine Abstoßung durch die Magnete erzeugt werden.

#### 2. Beobachtungen beim Versuch in der Realität

Wenn man solch ein Pendel in der Realität baut, so ergeben sich durch die Magnete sehr komplizierte Bahnen, wie man in Bild I.2e (vorige Seite) erkennen kann. Da in der Realität Energieverluste auftreten, kommt der Pendelkörper irgendwann zum stehen. Bei ausreichend starker Anziehung erfolgt dies über einem der Magnete.

An dieser Stelle wird das System chaotisch: Wenn man versucht das Pendel mehrmals von ein und der selben Position aus zu starten, so kommt es doch nicht immer über dem gleichen Magneten zum stehen.

Will man dieses Verhalten aber mit dem realen Versuchsaufbau untersuchen, so wird man nicht viel mehr als die obige Aussage formulieren können. Deshalb werden sich die folgenden Kapitel auch zuerst damit beschäftigen, wie man einen Versuchsverlauf ohne störende Einflüsse genau aufzeichnen kann. Denn erst dadurch wird es möglich, weitere Analysen anzustellen...

### 3. Definitionen

Für sämtliche Berechnungen im II. Kapitel und für einen Großteil der Beschreibungen ist es sinnvoll, an dieser Stelle einige Definitionen anzubringen. Diese mögen zum Teil trivial erscheinen, was Sie aber nicht daran hindern sollte, sie kurz zu überfliegen.

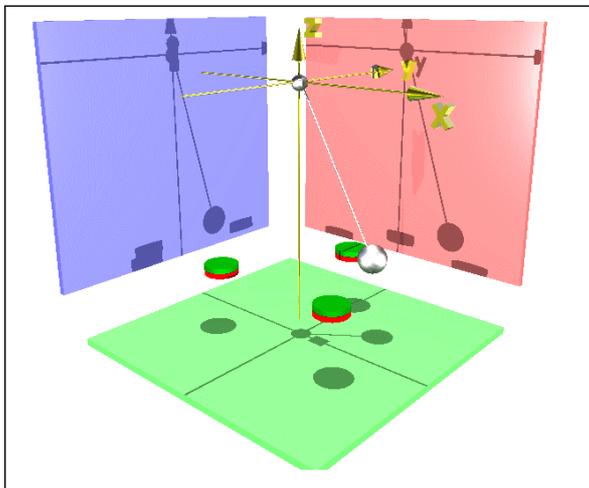


Bild I.3a

Die Projektion auf die grüne Ebene senkrecht auf der z-Achse wird im Folgenden *Aufsicht* oder *Projektion x-y* heißen.

Die Sicht auf die Ebene senkrecht auf der y-Achse in rot nenne ich *Projektion x-z* oder *Frontansicht*, der Blick auf die blaue Fläche heißt entsprechend *Projektion y-z* oder *Seitansicht*.

Die z-Achse ist antiparallel zur Richtung der Gewichtskraft orientiert. Die x- und y-Achse stehen auf der z-Achse und auf sich gegenseitig senkrecht.

Eine weitere Projektionsebene (*Projektion A*) liegt parallel zu der Ebene durch die z-Achse und den Pendelkörper.

Die Auslenkung erscheint dabei in wahrer Größe.

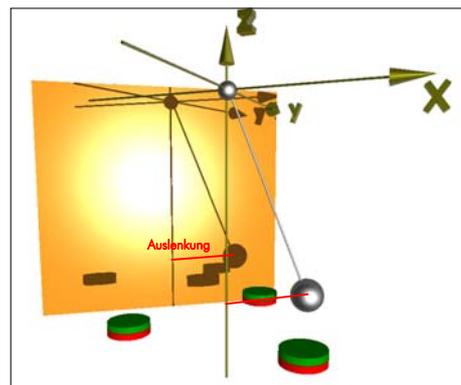


Bild I.3b

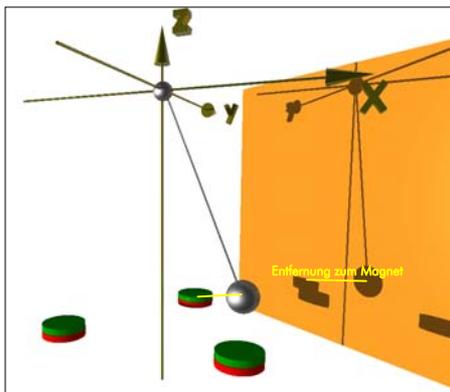


Bild I.3c

Die *Projektion M* schließlich ist die Projektion auf eine Ebene parallel zur z-Achse und zur Verbindungsline vom Pendelkörper zu dem jeweils betrachteten Magneten.

Hier erscheint die Entfernung des Pendelkörpers vom Magneten in wahrer Größe.

## Kapitel II - Physikalische Grundlagen

Dieser Abschnitt ist keine vollständige Wiederholung der physikalischen Grundlagen des Magnetpendels - was das betrifft muß ich mich auf das Vorwissen des Lesers stützen.

Vielmehr sollte dieser Abschnitt den Versuch des Magnetpendels nach den verschiedenen wirkenden Kräften gliedern und dadurch die Erfassung mittels einer Computersimulation ermöglichen.

### 1. Verwendete Winkel

Um die wirkenden Kräfte sinnvoll verwenden zu können müssen sie als Vektoren, nicht nur im Betrag vorliegen. Dazu führe ich im folgenden einige Winkel ein, die in mehreren Berechnungen benötigt werden. Berechnet werden die Winkel, indem man aus Gegenkathete  $k_y$  und Ankathete  $k_x$  eines rechtwinkligen Dreiecks nach der Beziehung  $\alpha_s = \tan^{-1} \left| \frac{k_y}{k_x} \right|$  den spitzen Winkel  $\alpha_s$  errechnet und diesen dann je nach den Vorzeichen der Katheten in die jeweiligen Quadranten transformiert.

Für mehr Informationen verweise ich auf die mathematischen Formelsammlung Fom S.37 (4), S.38 (1).

Bild II.1a

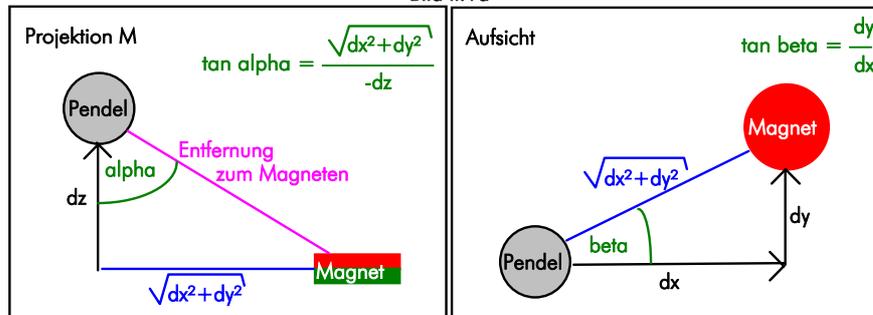


Bild II.1b

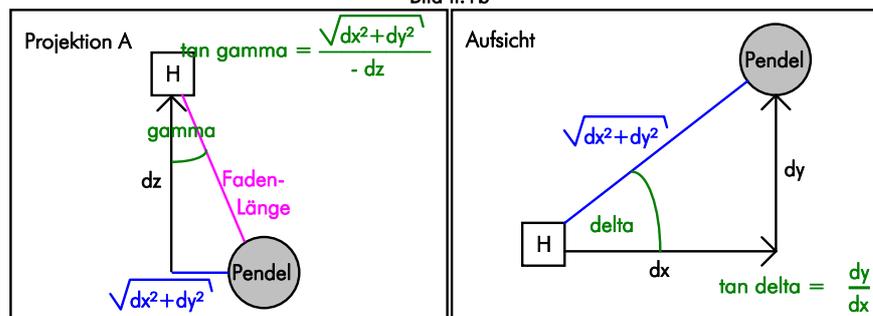
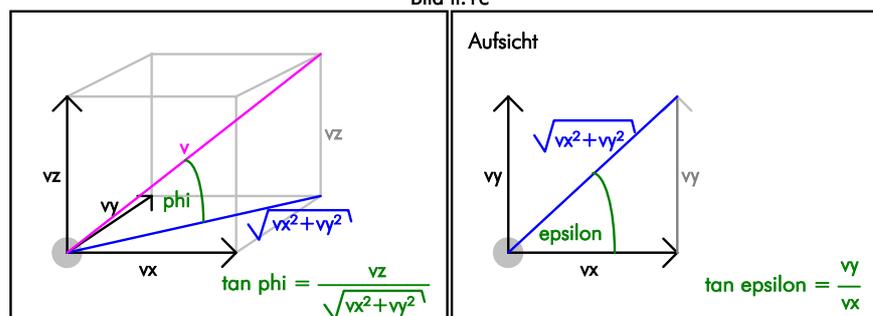


Bild II.1c



## 2. Die Kräfte, die auf das Pendel wirken

### 1. Magnetismus

Durch den Spin der Elektronen eines Atoms entstehen sogenannte Elementarmagnete, welche Stoffen magnetische Eigenschaften verleihen. Mag Seite 4

Magnete, also hart- oder weichmagnetische Stoffe, deren Elementarmagnete in eine bestimmte Richtung ausgerichtet sind, können nun auf andere Magnete oder ferromagnetische Stoffe eine Kraft ausüben. Im Allgemeinen sind die Felder dieser Magnete mathematisch schwer zu erfassen (Bild II.2.1a), da sie von der Form des Magneten, seinem Material und Magnetisierung abhängen. Das würde eine Computersimulation nur unnötig komplizierter machen. Daher gehe ich davon aus, dass die Magnete, die hier verwendet werden ein radiales Feld haben, mit der Eigenschaft, dass die Kraftwirkung auf den Pendelkörper quadratisch zur Entfernung abnimmt (Bild II.2.1b).

Diese Bedingung würden zwar auch elektrisch geladene Metallkugeln und ein elektrisch geladenes Pendel erfüllen, aber die Kraftwirkung wäre dann für einen Versuch in der Realität viel zu klein. Die Bahnen des Pendels werden durch die Feldform natürlich beeinflusst, das Gesamtergebnis, nämlich ein chaotisches Verhalten, wird dagegen nicht beeinträchtigt.

Ich möchte hier auch darauf hinweisen, dass solch ein Magnet nicht realisierbar ist, da bereits jeder Elementarmagnet einen Süd- und einen Nordpol hat, die nicht zu trennen sind. Die Magnetischen Feldlinien sind auf jeden Fall auf relativ kleinem Raum geschlossen (bei endlichen Magneten können sie nicht ins Unendliche reichen) Mag Seite 20, was nach der obigen Idealisierung nicht mehr der Fall ist, da ich dort von einem Magneten ausgehe, der ausschließlich einen Nord- oder Südpol besitzt.

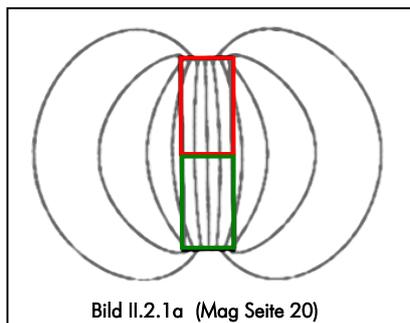


Bild II.2.1a (Mag Seite 20)

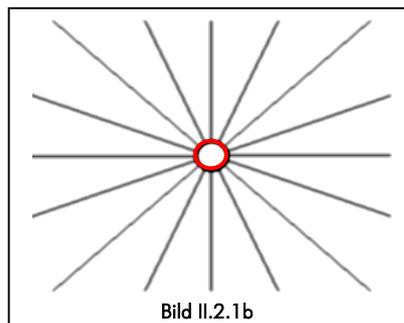


Bild II.2.1b

Die Kraft, die der Magnet auf den Pendelkörper bewirkt, berechnet sich dann, wie folgt:

$$f_m = f_0 \cdot \frac{1}{d^2}$$

$f_m$  Betrag der Kraft auf den Pendelkörper  
 $f_0$  Kraft, wenn das Pendel 1 cm vom Magneten entfernt ist  
 $d$  Entfernung des Pendelkörpers zum Magneten in cm

Die Kraft wirkt längs der Verbindungsstrecke zwischen dem Pendelkörper und dem Magneten

$$\vec{f}_m = f_0 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

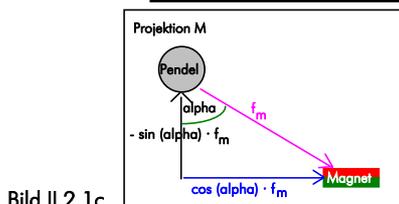


Bild II.2.1c

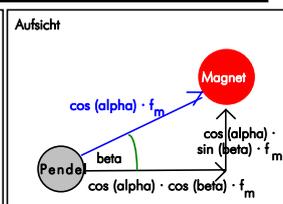


Bild II.2.1d

siehe auch Bild II.1a

## 2. Erdanziehung

Die Gravitation benötigt an dieser Stelle wohl keine Erläuterungen, also weise ich hier nur auf ihre Auswirkung auf den Pendelkörper hin. Sie bewirkt eine Kraft entgegen der Richtung der z-Achse:

$$\vec{f}_G = m \cdot g$$

- $f_G$  Gewichtskraft
- $m$  Masse des Körpers (das Pendel)
- $g$  Betrag der Fallbeschleunigung

$$\vec{f}_G = m \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## 3. Zentripetalkraft durch die Aufhängung

Da das Pendel an einem festen Haken, mit einem starren Faden, beziehungsweise einem Stab befestigt ist, tritt zwangsläufig eine Kraft auf, welche die Entfernung des Pendelkörpers vom Aufhängepunkt konstant hält. Diese Zentripetalkraft berechnet sich nach der Formel:

$$f_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

- $f_Z$  Betrag der Zentripetal-/Zentrifugalkraft
- $m$  Masse des Pendelkörpers
- $v$  Geschwindigkeit des Pendelkörpers
- $r$  Radius um die Aufhängung = Fadenlänge

Die Zentripetalkraft wirkt dabei in Richtung der Verbindungsstrecke zwischen Pendelkörper und Aufhängung:

$$\vec{f}_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \cdot \cos(\delta) \\ -\sin(\gamma) \cdot \sin(\delta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

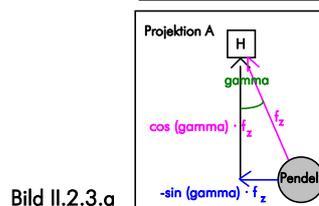


Bild II.2.3.a

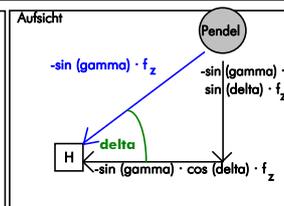


Bild II.2.3.b

siehe auch Bild II.1.b

## 4. Reibung

Durch die Bewegung tritt Reibung auf, wobei der Faden reibungsfrei an der Aufhängung befestigt sei und eventuelle Wirbelströme nicht bremsen. Also bleibt noch die Luftreibung, die in Näherung direkt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist:

$$f_R = \mu \cdot v^2$$

$f_R$  Reibungskraft  
 $\mu$  Reibungszahl  
 $v$  Geschwindigkeit des Pendelkörpers

Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung, also der Richtung der Geschwindigkeit entgegengesetzt:

$$\vec{f}_R = \mu \cdot v^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\phi) \cdot \cos(\epsilonpsilon) \\ -\cos(\phi) \cdot \sin(\epsilonpsilon) \\ -\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

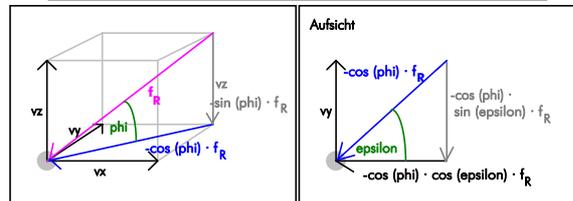


Bild II.2.4.a

Bild II.2.4.b

siehe auch Bild II.1.c

## 5. Störungen

Auf das System wirken in der Realität möglicherweise Störungen ein, die den Verlauf des Pendels beeinflussen. Von diesen sei die Richtung und der Betrag bereits vektoriell bekannt.

$$\vec{f}_S = \begin{pmatrix} f_{xS} \\ f_{yS} \\ f_{zS} \end{pmatrix}$$

### 3. Wirkung der Kräfte

#### 1. Teilweise Kompensation durch die Aufhängung

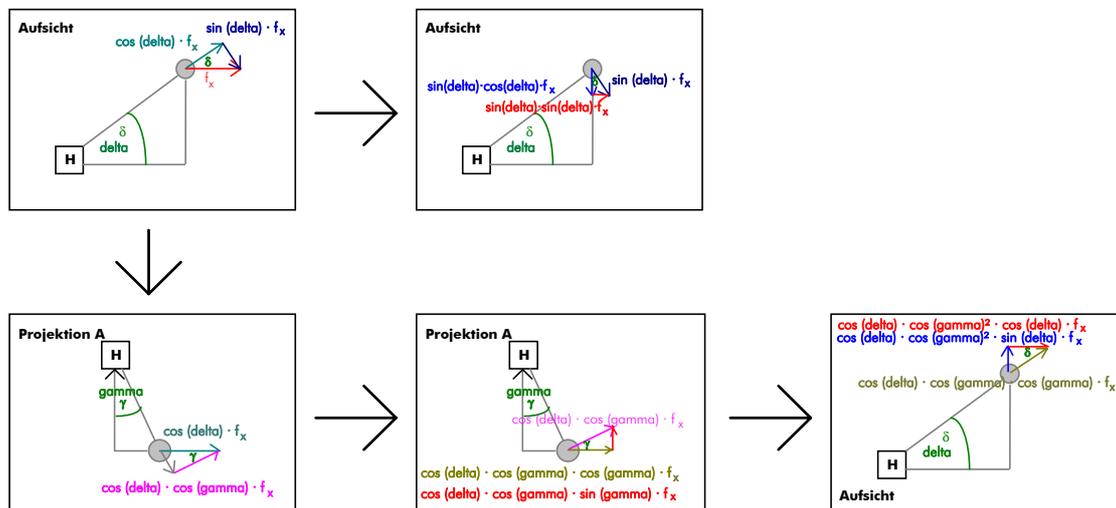
Der Pendelkörper, auf den die Kräfte wirken ist an einem starren Faden aufgehängt, der jeglichen Zug oder Druck mit einer, dem Betrag nach gleichen, der Aktion entgegengesetzten Reaktion beantwortet.

Das betrifft nicht die Zentripetalkraft  $f_z$ , da sie erst durch den Faden entsteht und bereits eine Reaktion, nämlich auf die Zentrifugalkraft durch die Bewegung darstellt.

Genauso kann hier die Reibung ausgenommen werden, da sie in der Gegenrichtung der Geschwindigkeit des Pendels wirkt, welche wiederum senkrecht auf dem Faden stehen muss.

Dass die Geschwindigkeit auf dem Faden senkrecht steht ist einfach damit zu begründen, dass das Pendel durch die bestimmte Länge des starren Fadens sich nur auf einer (Halb-)Kugelschale um die Aufhängung bewegen kann. Wäre die Geschwindigkeit nun nicht tangential zur Kugelschale (senkrecht zum dem Faden), dann würde der Pendelkörper sich von der Aufhängung weg, oder dazu hin, bewegen.

#### Die Kraft längs der x-Achse

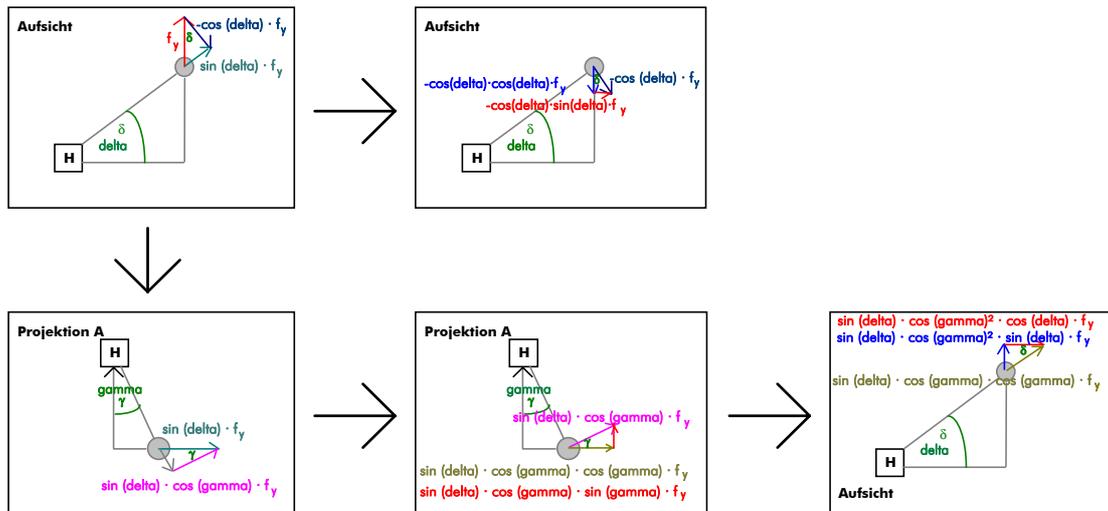


$$\vec{f}_x = f_x \cdot \begin{pmatrix} \sin(\delta) \cdot \sin(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma)^2 \cdot \cos(\delta) \\ -\sin(\delta) \cdot \cos(\delta) + \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma)^2 \cdot \sin(\delta) \\ \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_x = f_x \cdot \begin{pmatrix} \sin(\delta)^2 + \cos(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ \sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot (-1 + \cos(\gamma)^2) \\ \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_x = f_x \cdot \begin{pmatrix} \sin(\delta)^2 + \cos(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ -\sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\gamma)^2 \\ \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

Die Kraft längs der y-Achse

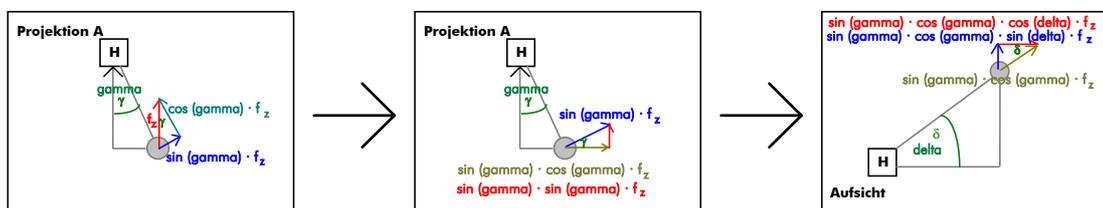


$$\vec{f}_y = f_y \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\delta) \cdot \sin(\delta) + \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma)^2 \cdot \cos(\delta) \\ \cos(\delta) \cdot \cos(\delta) + \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma)^2 \cdot \sin(\delta) \\ \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_y = f_y \cdot \begin{pmatrix} \sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot (\cos(\gamma)^2 - 1) \\ \cos(\delta)^2 + \sin(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_y = f_y \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\gamma)^2 \\ \cos(\delta)^2 + \sin(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

Die Kraft längs der z-Achse



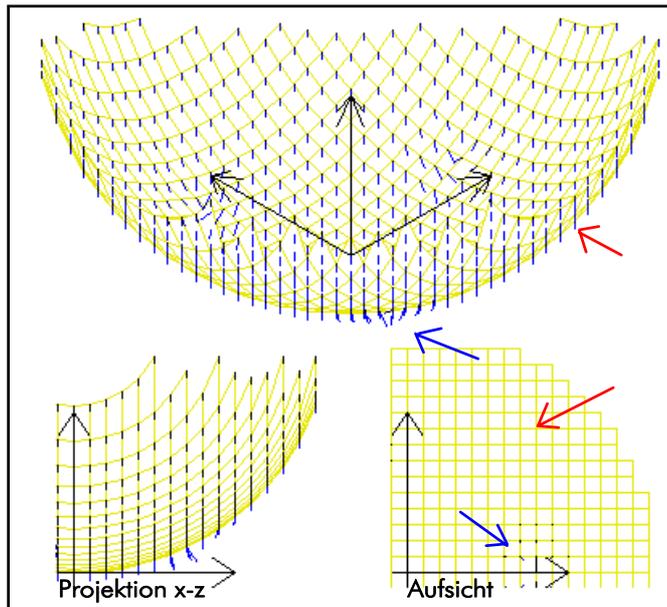
$$\vec{f}_z = f_z \cdot \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\delta) \\ \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\delta) \\ \sin(\gamma)^2 \end{pmatrix}$$

Die Kraft, die im Endeffekt für jegliche Beschleunigung entlang der Kugelschale verantwortlich ist berechnet sich aus der Summe der eben errechneten Kräfte:

$$\vec{f} = \vec{f}_x + \vec{f}_y + \vec{f}_z$$

Was die Rechnungen aus der Kraft, die auf den Pendelkörper gesamt wirkt macht, läßt sich anschaulich in einer vom Simulationsprogramm erstellten Kraftdarstellung zeigen:

Bild II.3.1a



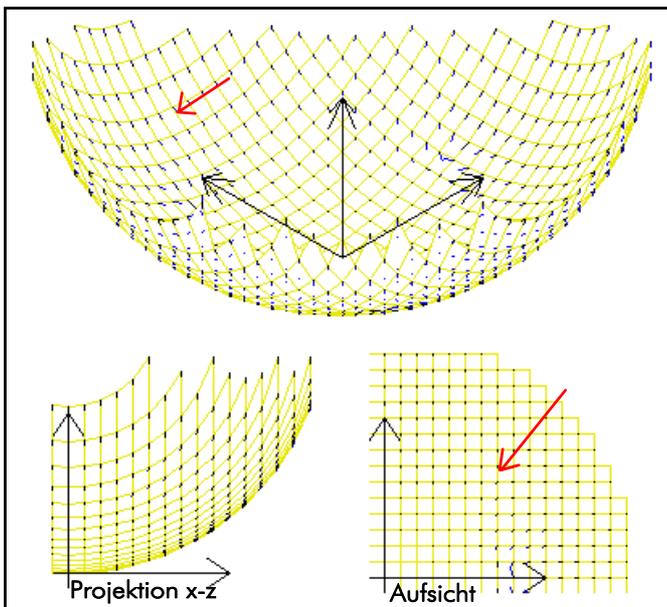
So sieht die Summe der Kräfte aus, die wirken.

Man kann deutlich die **Gewichtskraft** erkennen, die ausschließlich nach unten wirkt.

Die **Magnete** erkennt man an den Stellen, an denen die Kraftlinien auf einen bestimmten Punkt zulaufen.

Ohne die Aufhängung würde die Kugel folglich dauernd durch ihr Eigengewicht nach unten beschleunigt.

Bild II.3.1b



Wendet man die obigen Formeln auf die Summe der Kräfte an, so entsteht das Bild II.3.1b links.

Alle wirkenden Kräfte liegen jetzt tangential auf einer Kugelschale, die den Haken als Mittelpunkt und die Fadenlänge als Radius hat.

Die **Gewichtskraft** wirkt deshalb logischerweise auch zum tiefsten Punkt der Halbkugel (entlang der Kugelschale) und nicht mehr nur nach unten.

Diese Kräfte sind es, welche das Pendel letztendlich auf der Kugelschale beschleunigen.

## 2. Die Auswirkung auf den Pendelzustand

Der Computer speichert den aktuellen Zustand des Pendels anhand dessen Position und seiner Geschwindigkeit. Diese Werte müssen also entsprechend verändert werden...

Die Beschleunigung berechnet man aus den beschleunigenden Kräften:

$$\vec{f} = \vec{a} \cdot m$$

f beschleunigende Kraft  
m Masse des Pendels  
a Beschleunigung des Pendels

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$$

Nachdem nun die Beschleunigung die 1. Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, ergibt sich für die Geschwindigkeitsänderung:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

a Beschleunigung des Pendels  
Dv Geschwindigkeitsänderung  
durch die Beschleunigung a

$$\Delta \vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt$$

$$d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$$

Das Selbe gilt äquivalent für die Position:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

v Momentan-Geschwindigkeit  
des Pendels  
Ds Positionsänderung des Pendels

$$\Delta \vec{s} = \int \vec{v} \cdot dt$$

$$d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$$

Damit bin ich mit dem Kapitel II über die physikalischen Grundlagen am Ende angelangt. Wie diese Berechnungen in der Computersimulation verwendet werden, beschreibt Kapitel III.

## Kapitel III - Eine Simulation am Computer

Seit nun mehr als 10 Jahren werden auf dem Markt leistungsfähige Computer angeboten, die durch ihre Massenproduktion immer billiger wurden und somit heute praktisch jedem zugänglich sind. Von Rechnern zur Textverarbeitung mit einer noch relativ geringen Leistung von weniger als 10 komplexen Berechnungen, wie zum Beispiel die Näherung einer Wurzel, pro Sekunde, entwickelte die Industrie immer schnellere Rechner - vor allem um dem Benutzer durch eine grafische Oberfläche eine einfachere Bedienbarkeit zu gewährleisten und, um genügend Leistung für absatzstarke Computerspiele zu schaffen.

### 1. Die Programmierung einer Simulation

Dieses große Kapitel wird zunächst den Sinn des Einsatzes von Computern im Bezug auf diese Facharbeit erläutern und anschließend einige Teile des Programms "Simulation eines Magnetpendels" erläutern. Ich werde versuchen, mich dabei möglichst kurz zu fassen - lassen Sie sich nicht von dem langen Listing auf der Diskette erschrecken - ein Großteil des Programms wird für die grafische Darstellung und die bequeme Windows-Oberfläche benötigt.

#### 1. Das Prinzip einer Simulation

Durch die oben genannte Entwicklung stehen der Wissenschaft heute preiswerte und leistungsstarke Rechner zur Verfügung.

#### Aber was kann so ein Computer überhaupt ?

Eigentlich beschränken sich seine gesamten Möglichkeiten darauf, Programme, also Befehle, einen nach dem anderen, auszuführen. Primär können dabei nur Daten aus dem Speicher abgerufen werden, auf diese lassen sich Rechenoperationen anwenden und das Ergebnis wird in den Speicher zurückgeschrieben.

Inzwischen ist der schnelle RAM-Speicher mit über 32 MByte in der Lage, 33 Millionen Bool'sche Variablen (wahr oder falsch) zu speichern, darin lassen sich 850 Seiten Text unterbringen oder 420.000 sehr genaue reelle Zahlen (extended). Das genügt auch für komplexe Simulationen.

Mehr Probleme macht die Rechenleistung - gerade bei Basic-, Pascal- oder Delphi-Programmen. Die schnellen Rechner können zwar schnell und viel rechnen, aber bei komplexen Simulationen kommen eine ganze Menge Berechnungen pro Schritt zustande. Vor allem die Grafikausgabe braucht relativ viel Zeit.

Hier eine kleine Übersicht, wie viele Berechnungen pro Sekunde mit Delphi auf einem PII - Rechner möglich sind:

- 30 Mio. leere Wiederholungen und beinahe genauso oft das Speichern in eine Variable
- 16 Mio. Additionen, aber nur für Integer-Variablen (natürliche Zahlen)
- Nur 1 Mio. Speichervorgänge, Additionen und Multiplikationen, 800.000 Divisionen und 700.000 Wurzeln mit Extended-Variablen - und diese Variablen sind für eine Simulation notwendig
- Nur 20.000 einzelne Punkte können in einer Sekunde auf dem Bildschirm gezeichnet werden, nur 10.000 kleine Rechtecke und 1500 Kreise. Und das auf einem - zur Zeit - schnellen Rechner bei optimalen Bedingungen !

Wie kann ein Computer aber mit diesen beschränkten Mitteln, einen Vorgang aus unserer realen Umwelt simulieren ?

Ganz einfach: Naturwissenschaft geht davon aus, dass jeder Vorgang in der Natur gewissen Regelmäßigkeiten folgt - die schwache Kausalität. Damit kann man ziemlich sichere Vorhersagen machen, was mit einem System in einer gewissen Zeit geschehen wird.

Gibt man einem Computer nun Formeln ein, mit denen man die Gesetzmäßigkeiten mathematisch erfasst hat und gibt ihm dann Anweisungen, diese Formeln auf ein bestimmtes System in einem bekannten Zustand anzuwenden, so wird er einen neuen Zustand berechnen, der so in der Natur auch aus dem vorherigen entstanden wäre. Wie genau diese Ergebnisse sind hängt davon ab, wie gut die Formeln der Wirklichkeit entsprechen und ob alle Einflüsse mit eingerechnet wurden.

Damit hat man nun den zu erwartenden Zustand nach einer bestimmten Zeit errechnet. Daraus kann der Computer nun wiederum den nächsten berechnen, und so weiter, solange man will...

## 2. Sinn und Zweck einer Computersimulation

Mit dieser Methode können Vorgänge aus der Realität sehr genau nachgebildet und Versuche ohne ungewollte Störungen in einem abgeschlossenen System simuliert werden. Man kann einen Versuch bei geringem Zeit- und Kostenaufwand beliebig oft wiederholen und sämtliche Bedingungen dafür frei wählen. Die Industrie (zum Beispiel Maschinen-, Auto- oder Gesundheitsforschung) spart dadurch enorme Kosten, Rohstoffe oder Leben von Versuchstieren...

Demgegenüber sollte man immer daran denken, dass eine Simulation immer auf den schon bekannten Gesetzmäßigkeiten beruht, und dass in der Realität, in einem nicht geschlossenen System, immer Umstände vorhanden sind, die in der Simulation nicht berücksichtigt werden können. Gerade bei neueren Forschungen, wie zum Beispiel über Quanten und Quarks, kann ein Computer zwar bei der Auswertung der Ergebnisse helfen, ein Versuch, der nicht auf den bekannten Gesetzen beruht, kann aber nicht durch eine Simulation am Computer ersetzt werden !

Zum Glück beruht das Magnetpendel auf der bekannten Physik, nämlich auf Magnetismus, Gravitation, auf Trägheit, sowie auf einfacher Mechanik, wie Fliehkraft oder dem Aktion-Reaktion-Prinzip. Die Versuche sollen möglichst ohne Störungen von außen verlaufen, also bietet sich auch in dieser Hinsicht eine Computersimulation an - gerade, da für einige Analysen der Versuche häufige Wiederholungen durchgeführt werden müssen.

### Probleme

Problematisch könnte zum einen werden, dass sich sogar winzigste Störungen im Atombereich oder kleiner, die der Computer nicht erfassen kann oder die außerhalb der bekannten Physik liegen, auf das Ergebnis auswirken können.

Zum anderen hat der Computer nur ein begrenztes Auflösungsvermögen; ein kontinuierlicher Zeitablauf ist genauso wenig möglich, wie eine kontinuierliche Bewegung, da man immer eine bestimmte Zeit voraussetzen muß, in der die Bedingungen und Kräfte konstant bleiben. Eine genauere Betrachtung der dadurch entstehenden Fehler finden Sie im Anhang A1.

Je kleiner diese Zeitschritte werden, desto mehr Berechnungen müssen in der selben Zeit durchgeführt werden. Die Grenze, sogar neuer Computer wird dadurch schnell erreicht. Da die Natur aber keine Zeitschritte im Bereich von Millisekunden hat, und da ein Körper auf seiner Bahn von einem Punkt zu einem anderen dazwischen ca. unendlich viele Positionen einnimmt, muss der Rechner hier nähern. Mehr finden Sie weiter unten.

Da die Simulation, im Bezug auf chaotisches Verhalten, zumindest im Prinzip, die selben Ergebnisse wie die Realität liefert, dürfte der Computer trotz der oben genannten Einschränkungen ein geeignetes Instrument zur Analyse des Magnetpendels und seines Verhaltens sein.

### 3. Vereinfachungen

Das Ziel des Programms "Simulation eines Magnetpendels" ist es nicht, den Versuchsaufbau des "echten" Magnetpendels vollkommen zu ersetzen, also eine nicht mehr zu unterscheidende Kopie davon zu generieren, vielmehr soll das chaotische Verhalten, das man im realen Versuch beobachtet eine Erklärung finden.

Daher würde es der Zielsetzung widersprechen, dem Programm eine große Menge an Formeln einzuprogrammieren, mit denen die Magnete genau charakterisiert werden, die Luftreibung je nach Material neu berechnet und eventuell vorüberfliegende Schmetterlinge berücksichtigt werden können. Abgesehen davon, dass es die Programmierung extrem erschweren würde, hätten diese Einflüsse auf das Gesamtergebnis keinen Einfluss. Ein einzelnes Ergebnis, verglichen mit der Realität, wird natürlich deutlich erkennbare Unterschiede aufweisen !

Im Folgenden führe ich daher für die Programmierung des Versuchs "Magnetpendel" einige Vereinfachungen auf:

- Das Programm benutzt mathematisch sehr einfach zu handhabende Magnete, die ein radiales Feld haben, dessen Kraftwirkung nach außen quadratisch zur Entfernung abnimmt (siehe auch Kapitel II).
- Die Magnete sind, genauso wie die Aufhängung und der Pendelkörper, punktförmige Gebilde. Damit stoßen Pendelkörper und Magnete normalerweise nicht zusammen, was die Bewegung empfindlich stören würde.
- Das Pendel hängt an einem starren Stab, der weder gedehnt, noch gestaucht werden kann. In der Praxis hat das keine Bedeutung, solange das Pendel unter seiner Aufhängung schwingt und die Kräfte, die das Pendel zur Aufhängung ziehen nicht größer als die Flieh- und Gewichtskraft werden (zum Beispiel durch einen starken Magneten). Im Text werde ich trotzdem aus phonetischen Gründen im Allgemeinen das Wort "Faden" verwenden.
- Die Reibungskraft ist direkt proportional zum Quadrat der Momentangeschwindigkeit und ihrer Richtung entgegengesetzt. Im Pendelkörper treten keine Wirbelströme auf, welche der Pendelbewegung Energie entziehen.

### 4. Genauigkeit

Der Computer kann Entfernungen und Zeitabschnitte nur bis zu einer bestimmten Genauigkeit speichern. Entfernungen und Zeiten werden als extended-Variablen auf 19 bis 20 Stellen genau bearbeitet und gespeichert.

Ich möchte darauf hinweisen, dass sich diese Genauigkeit bei machen Analysen (bei extremer Vergrößerung !) in Form eines gleichmäßigen Verhaltens äußern kann, das zum chaotischen Verhalten in der Realität im Widerspruch steht und dort nicht auftreten würde. Solange Sie allerdings über oder im Piko-Bereich bleiben, dürften keine Probleme auftreten.

Die Zeit für eine Berechnung kann frei gewählt werden und wird für die Versuche bei 0.003 bis 0.008 Sekunden liegen. Da der Computer bei kleineren Schritten zu lange für die Grafikausgabe und Berechnungen braucht, um das Ergebnis in dieser Zeit sinnvoll zu präsentieren, kleine Zeitschritte aber für die Simulation äußerst wünschenswert sind, kann die Zeit, die in der Simulationswelt während eines Berechnungsschritts vergeht (der subjektive Zeitschritt) sich von der, die am Bildschirm für eine Berechnung vergeht (der reale Zeitschritt) unterscheiden.

Diese Optionen sind im Programm wählbar.

## 5. Die Umsetzung der physikalischen Berechnungen

Für dieses Kapitel sollte der Leser einige Kenntnisse der Programmiersprache Pascal haben. Auch Basic-Programmierer dürften mit den Programmausschnitten zurechtkommen. Das komplette Listing finden Sie auf der Diskette.

Listings sind in violett gedruckt. Um den Gesamtzusammenhang des Code nicht zu verlieren ist rechts der Listings eine Dokumentation abgedruckt, welche die wichtigsten Fakten erläutert. Bezeichner (Variablen, Prozeduren...) stehen in [Eckigen Klammern].

### Die wichtigsten Variablen

Der Computer muss den Zustand des Pendels in Variablen speichern. Es wäre relativ sinnlos, hier die eigentliche Variablendeklaration aufzuführen, da zum Beispiel var Haken : THaken über die Variable Haken kaum etwas aussagt. Vielmehr lesen Sie hier nun die Typen der verwendeten Variablen.

```

type Txyz=record
    x, y, z : extended;
end;
THaken=record
    Pos      : Txyz;
    length   : extended;
end;
TAktuell=record
    Pos      : Txyz;
    PrevPos  : Txyz;
    StartPos : Txyz;
    v        : Txyz;
    StartV   : Txyz;
    fw       : Txyz;
    f        : Txyz;
    a        : Txyz;
    gewicht  : extended;
    masse    : extended;
    schritt  : longint;
end;
TMagnet=array[1..5] of record
    Pos      : Txyz;
    Kraft    : extended;
end;
TUmgebung=record
    Zeit      : extended;
    dt        : extended;
    dtp       : extended;
    Reibung   : extended;
    Magnete   : integer;
    MRadius   : extended;
end;
TStoerung=record
    time      : extended;
    done, now : boolean;
    f         : Txyz;
end;
.
.
.

```

Um mit Vektoren arbeiten zu können wird hier als erstes ein Typ [Txyz] definiert, der 3 Werte, entsprechend den 3 Raum-Dimensionen speichern kann.

Die Variable [Haken] speichert die Position des Pendels und die Länge des Fadens, an dem das Pendel hängt.

Der Zustand des Pendels und einiges seiner Daten sind in der Variable [Aktuell] gespeichert. Darin enthalten sind, neben der aktuellen Position [Pos] und der Geschwindigkeit [v], noch Felder als Zwischenspeicher für die Berechnungen und die Ausgabe dieser Werte. Darunter sind:

[fw] - Die Summe der wirkenden Kräfte,  
 [f] - Die Kräfte längs der Kugelschale  
 [a] - Die aktuelle Beschleunigung ([a]~[f])  
 [gewicht] - Die Gewichtskraft des Pendels  
 [masse] - Die Masse des Pendelkörpers  
 [schritt] - Die Nummer des Berechnungsschritts  
 [PrevPos] - Die letzte Position der Pendelkörpers

In [Magnet[1..5]] können bis zu 5 Magnete anhand Ihrer Position und Ihrer Kraft in 1cm Entfernung angegeben werden

In der Variable [Umgebung] finden sich die aktuelle [Zeit], die Zeitschritte [dt], die während einer Berechnung subjektiv vergehen und die Zeit, die wirklich (am Bildschirm) vergeht [dtp]. Die [Reibung] und die Anzahl der [Magnete] sind weitere Variablen in diesem Typ.

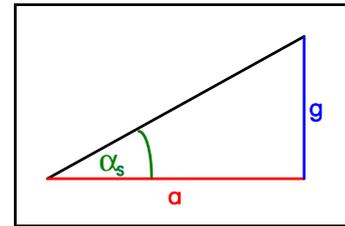
Für die Simulation einer Störung ist die gleichnamige Variable zuständig. Hier wird die Wirkung der Störung anhand einer Kraft [f] festgelegt, die für einen Zeitschritt [Umgebung.dt] wirkt. Sie kann zu einer bestimmten subjektiven Zeit [time] oder auf Tastendruck [Time]=0 erfolgen.

Im Programm sind noch weitere Typen deklariert, die zum Großteil mit Windows' Fensterwirtschaft zusammenhängen und in diesem Zusammenhang nicht erläutert werden müssen. 2 Typen sind ausserdem für die Grafik vorhanden.

Mit diesen Variablen ist für den Computer der aktuelle Zustand des Systems Magnetpendel festgelegt und über Variablen, wie die [Reibung], weiß der Computer auch, wie sich dieses System verhalten soll. Werte, wie die aktuelle Beschleunigung werden in diesen globalen Variablen gespeichert, damit man sie dadurch überall im Programm einfach abrufen und ausgeben kann.

Die Berechnung von Winkeln

```
function xyTOrad(g, a : extended) : extended;
var winkel : extended; {zwischen 0..90°}
    quad4 : extended; {Gesamtwinkel}
begin
  if a=0 then begin (c)
    if g>=0 then quad4:=pi/2;
    if g<0 then quad4:=3*pi/2;
  end else begin
    winkel:=arctan(abs(g/a)); (a)
    if (a>=0) and (g>=0) then quad4:=winkel; (b)
    if (a<0) and (g>=0) then quad4:=pi-winkel;
    if (a<0) and (g<0) then quad4:=pi+winkel;
    if (a>=0) and (g<0) then quad4:=2*pi-winkel;
  end;
  xyTOrad:=quad4;
end;
```



Die Funktion [xyTOrad] ist in der Lage, aus der Gegenkathete [g] und der Ankathete [a] eines Winkels [quad4] in einem rechtwinkligen Dreieck den entsprechenden Winkel zu berechnen.

Im Physik-Teil Kapitel II wird eine entsprechende Formel vorgestellt - oben sehen Sie die praktische Anwendung.

$$\alpha_s = \tan^{-1} \left| \frac{g}{a} \right| = \arctan |g / a|$$

Zuerst wird aus dem Betrag des Quotienten aus g und a ein spitzer Winkel  $\alpha_s$ , genannt [winkel], nach obiger Beziehung berechnet (a). Dann wird aus den Vorzeichen von g und a der Quadrant des Winkels errechnet und der spitze Winkel dorthin transformiert Form Seite 38 (1). Das Ergebnis wird in [quad4] gespeichert (b).

Probleme, die dabei für [a]=0 auftreten würden (Division durch 0) werden abgefangen (c) und je nach [g] wird [quad4] als 90° oder 270° Winkel gespeichert. Ein Punkt hat nach dieser Funktion eine Richtung von 90°.

Der Grund, warum ich in Berechnungen mit Winkeln nicht gleich das Verhältnis von Ankatheten, Gegenkatheten und Hypotenusen benutze, was bei der häufigen Verwendung von Sinus und Kosinus sinnvoll erscheint, liegt darin, dass das Programm dann jedesmal Fallunterscheidungen bräuchte, um Divisionen durch 0 zu vermeiden. Das würde den entsprechenden Quelltext um ca. 15% verlängern.

### Der Kern der Simulation - die Berechnung des nächsten Zustands

Diese Prozedur ist das Herz des ganzen Programms und deshalb recht umfangreich. Ihre Funktion besteht darin, aus dem Zustand zu einer Zeit [time] den Zustand zur Zeit [time]+[dt] zu berechnen. Alle entsprechenden Werte finden sich in der Variable [Aktuell] beziehungsweise [Umgebung]. Die Benutzung des Typs [Txyz] habe ich hier unterlassen, um Verwechslungen mit den Variablen in [Aktuell] zu vermeiden. Am Ende der Prozedur werden alle entsprechenden Werte an die Variable [Aktuell] weitergegeben.

```

procedure Berechnung;
var fwx, fwy, fwz : extended;
    fx, fy, fz : extended;
    dx, dy, dz : extended;
    dxyQ : extended;
    distanceQ : extended;
    dkraft : extended;
    fmx, fmy, fmz : extended;
    fmxxy : extended;
    i : integer;
    alpha, beta : extended;
    gamma, delta : extended;
    epsilon, phi : extended;
    a, b, c, d : extended;
    VBetragsQ : extended;
    fcent, freib : extended;
    dvx, dvy, dvz : extended;
    dsx, dsy, dsz : extended;
begin

```

Hier einige interne Variablen:

Die Kräfte, die auf das Pendel einwirken

Die Kräfte, die längs der Kugelschale wirken

Mehrfach verwendet: eine Entfernung zwischen 2 Punkten

Eine Entfernung in der Aufsicht zum Quadrat

Die Entfernung<sup>2</sup> Magnet - Pendelkörper

Die Kraft durch den Magneten in der Entfernung [distance]

Die magnetische Kraft vektoriell

Die magnetische Kraft in der Aufsicht

Ein Zähler für die Nummer des aktuell bearbeiteten Magnets

Die Winkel alpha bis phi (hier in ASCII-Buchstaben) sind im Kapitel II.1 definiert worden.

Speicher für Zwischenergebnisse

Das Quadrat des Betrags der Geschwindigkeit

Zentripetal- und Reibungskraft

Veränderung der Geschwindigkeit (siehe Kapitel II.3.2)

Veränderung der Position (siehe Kapitel II.3.2)

Auf das Pendel wirken verschiedenen Kräfte, die im folgenden einfach aufsummiert werden. Dabei werden die Formeln aus Kapitel II.2 verwendet.

[fwx], [fwy] und [fwz] sind dabei die drei Komponenten des Gesamtkraft-Vektors; dieser wird hier zurückgesetzt, und bevor etwas verändert wird, speichert das Programm die alte Position.

```

aktuell.prevPos:=aktuell.pos;
fwx:=0; fwy:=0; fwz:=0;

```

#### 1. Die Gewichtskraft

```

fwz:=-aktuell.gewicht;

```

$$\vec{f}_G = m \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#### 2. Die Kraft durch die Magnete

Jeder Magnet wird in einer Schleife einzeln berechnet, und die Ergebnisse werden zur gesamt durch die Magnete wirkenden Kraft addiert.

```

for i:=1 to umgebung.magnete do begin
    with magnet[i] do begin

```

Zuerst ist die Entfernung des Magneten vom Pendel wichtig - mit dem Satz von Pythagoras Form Seite 27 (2) einfach zu berechnen.

```

dx:=pos.x-aktuell.pos.x;
dy:=pos.y-aktuell.pos.y;
dz:=pos.z-aktuell.pos.z;
distance:=sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);

```

Bei einer Schrittweite von mehreren Millisekunden können durch große Kräfte, die zum Beispiel wegen einer großen Nähe des Pendels zum Magneten entstehen, größere Fehler in der Berechnung entstehen. Um das zu vermeiden ist mindestens 1 Zentimeter Abstand zwischen Magnet und Pendel einzuhalten. Damit löst sich auch das Problem, dass die Kraft bei Abstand  $distance=0$  nicht zu bestimmen wäre.

```
if distanceQ<0.0001 then begin
  Form1.SimulationTimer.enabled:=false;
  if messagedlg('Das Pendel schwingt näher als 1 cm an einem Magneten'+#13+
    +#13+
    'Da die Kraft jetzt sehr groß wäre, werden'+#13+
    'vermutlich Berechnungsfehler auftreten !'+#13+
    'Sie sollten das Pendel eventuell höher aufhängen.'+#13+
    +#13+
    'Soll das Programm fortfahren',mtwarning,[mbytes,mbno],0)=mrno then halt;
end;
```

Anderenfalls wird hier die Kraft berechnet.

$$f_m = f_0 \cdot \frac{1}{d^2}$$

$f_m$	dkraft
$f_0$	Magnet[Nummer].Kraft
$d$	distance

Die Entfernung<sup>2</sup> wird hierbei in Zentimeter<sup>2</sup> berechnet, da die Angabe der Kraft  $f_0$  eines Magneten für die Entfernung 1 Zentimeter gilt:

```
dkraft:=kraft/(distanceQ*10000);
end;
```

Jetzt muss die Kraft, von der durch [dx], [dy], [dz] die Richtung bekannt ist, noch als Vektor, also mit Richtung berechnet werden und dieser zur bisherigen Kraft addiert werden. Die Winkelberechnung findet sich in Kapitel II.1.

```
alpha:=xyTOrad(sqrt(dx*dx+dy*dy),-dz);
fmz:=-sin(alpha)*dkraft;
beta:=xyTOrad(dy,dx);
fmxy:=cos(alpha)*dkraft;
fmx:=cos(beta)*fmxy;
fmy:=sin(beta)*fmxy;
fwx:=wx+mx;
fwy:=wy+my;
fwz:=wz+mz;
end;
```

$$\vec{f}_m = f_0 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

### 3. Störungen

Wenn die Prozedur das Signal erhält, in diesem Schritt eine Störung einzurechnen, so wird diese einfach zu den wirkenden Kräften addiert und die Meldung zurückgegeben, dass die Störung erfolgt ist:

```
if (stoerung.now) then begin
  with stoerung do begin
    fwx:=fwx+f.x;
    fwy:=fwy+f.y;
    fwz:=fwz+f.z;
  end;
  stoerung.done:=true;
end;
```

$$\vec{f}_s = \begin{pmatrix} f_{xs} \\ f_{ys} \\ f_{zs} \end{pmatrix}$$

#### 4. Reibungskraft

```
with aktuell.v do begin
  VBetragQ:=x*x+y*y+z*z;
  if VBetragQ>0 then begin
    epsilon:=xyToRad(y,x);
    phi:=xyToRad(z,sqrt(x*x+y*y));
    fReib:=VBetragQ*umgebung.reibung;
    fwz:=fwz-sin(phi)*fReib;
    fwx:=fwx-cos(phi)*cos(epsilon)*fReib;
    fwy:=fwy-cos(phi)*sin(epsilon)*fReib;
  end;
end;
```

$$\vec{f}_R = \mu \cdot v^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\phi) \cdot \cos(\epsilonpsilon) \\ -\cos(\phi) \cdot \sin(\epsilonpsilon) \\ -\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Summe der wirkenden Kräfte wird nun an die Variable Aktuell weitergegeben.

```
Aktuell.fw.x:=fwx;
Aktuell.fw.y:=fwy;
Aktuell.fw.z:=fwz;
```

Jetzt kommt der wohl komplizierteste Teil der Berechnung, nämlich die Reaktion des Pendelfadens auf jegliche Kräfte längs diesem. Was danach von der Kraft übrig bleibt wird in [fx], [fy] und [fz] gespeichert. Für die Berechnung sind auch hier wieder die Entfernung des Pendels von der Aufhängung [dx], [dy], [dz] und einige daraus entstehende Winkel wichtig, deren Berechnung näher im Kapitel II.1 beschrieben ist. Die Formeln an der rechten Seite finden Sie im Kapitel II.3.1.

Für eine schnellere Berechnung sind die Kräfte nicht direkt nach den Formeln programmiert, sondern über Zwischenergebnisse:

```
fx:=0; fy:=0; fz:=0;
dx:=aktuell.pos.x-haken.pos.x;
dy:=aktuell.pos.y-haken.pos.y;
dz:=aktuell.pos.z-haken.pos.z;
delta:=xyToRad(dy,dx);
gamma:=xyToRad(sqrt(dx*dx+dy*dy),-dz);
```

##### 1. Aufspaltung der Kraft in x - Richtung

```
a:=cos(delta)*fwx;
b:=sin(delta)*fwx;
fx:=fx+sin(delta)*b;
fy:=fy-cos(delta)*b;
c:=cos(gamma)*a;
fz:=fz+sin(gamma)*c;
d:=cos(gamma)*c;
fx:=fx+cos(delta)*d;
fy:=fy+sin(delta)*d;
```

$$\vec{f}'_x = f_x \cdot \begin{pmatrix} \sin(\delta)^2 + \cos(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ -\sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\gamma)^2 \\ \cos(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

##### 2. Aufspaltung der Kraft in y - Richtung

```
a:=sin(delta)*fwy;
b:=cos(delta)*fwy;
fy:=fy+cos(delta)*b;
fx:=fx-sin(delta)*b;
c:=cos(gamma)*a;
fz:=fz+sin(gamma)*c;
d:=cos(gamma)*c;
fx:=fx+cos(delta)*d;
fy:=fy+sin(delta)*d;
```

$$\vec{f}'_y = f_y \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\delta) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\gamma)^2 \\ \cos(\delta)^2 + \sin(\delta)^2 \cdot \cos(\gamma)^2 \\ \sin(\delta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}$$

##### 3. Aufspaltung der Kraft in z - Richtung

```
c:=sin(gamma)*fwz;
fz:=fz+sin(gamma)*c;
d:=cos(gamma)*c;
fx:=fx+cos(delta)*d;
fy:=fy+sin(delta)*d;
```

$$\vec{f}'_z = f_z \cdot \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\delta) \\ \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\delta) \\ \sin(\gamma)^2 \end{pmatrix}$$

Als Ergebnis ( $[f_x]$ ,  $[f_y]$  und  $[f_z]$ ) hat das Programm jetzt jene Kraft, die das Pendel wirklich beschleunigt.

$$\vec{f} = \vec{f}_x + \vec{f}_y + \vec{f}_z$$

Als nächster Punkt ist die Zentripetalkraft anzusprechen, die den Pendelkörper auf einer Halbkugelschale um die Aufhängung hält. Wie bei der Reibungskraft wird hier zuerst das Quadrat der Geschwindigkeit bestimmt (über Pythagoras).

```
with aktuell.v do begin
  VBetragQ:=x*x+y*y+z*z
end;
```

Für den Fall, dass das Pendel steht, was im Allgemeinen der Fall ist, wenn eine andere Routine Kräfte berechnen läßt, wird das Folgende ausgelassen. Sonst wird der Betrag der Zentripetalkraft  $[f_{cent}]$  berechnet und gleich in vektorieller Form zu der bisher wirkenden Kraft addiert. Warum die Reaktion durch den Faden hier nicht mehr berechnet werden muß und woher die Formeln kommen steht wieder in den Kapiteln II.2.3, II.2.4, II.3.1.

```
if VBetragQ>0 then begin
  fcent:=aktuell.masse*VBetragQ/haken.length;
  fz:=fz+cos(gamma)*fcent;
  fx:=fx-sin(gamma)*cos(delta)*fcent;
  fy:=fy-sin(gamma)*sin(delta)*fcent;
end;
```

$$\vec{f}_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \cdot \cos(\delta) \\ -\sin(\gamma) \cdot \sin(\delta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

Nun hat das Programm alle an der Position  $[Aktuell.Pos]$  wirkenden Kräfte berechnet und der neue Zustand kann daraus, wie in Kapitel II.3.2 beschrieben bestimmt werden.

Wichtig ist hierbei, dass das Programm davon ausgeht, dass die Kraft, Geschwindigkeit und Beschleunigung für den Zeitschritt  $dt=[dt]$  konstant bleibt. Für Integrale lässt sich deshalb folgende Vereinfachung anwenden:

$$\int_t^{t+dt} \vec{k} \cdot dt' = \vec{k} \cdot dt$$

t	aktuelle Zeit
dt	Zeitschritt
k	konstante Größe

Wendet man dies auf alle im Kapitel II.3.2 gefunden Formel an, so ergibt sich das folgende Ergebnis; die Unterschiede in Form der D-Werte werden zu den alten Werten addiert, wodurch sich die neue Geschwindigkeit und Position berechnen.

```
{Übergeben und neue Position berechnen}
with aktuell do begin
  f.x:=fx;
  f.y:=fy;
  f.z:=fz;
  a.x:=f.x/masse;
  a.y:=f.y/masse;
  a.z:=f.z/masse;
  dvx:=a.x*umgebung.dt;
  dvy:=a.y*umgebung.dt;
  dvz:=a.z*umgebung.dt;
  v.x:=v.x+dvx;
  v.y:=v.y+dvy;
  v.z:=v.z+dvz;
  dsx:=v.x*umgebung.dt;
  dsy:=v.y*umgebung.dt;
  dsz:=v.z*umgebung.dt;
  pos.x:=pos.x+dsx;
  pos.y:=pos.y+dsy;
  pos.z:=pos.z+dsz;
end;
```

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \cdot dt \quad \Delta \vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt$$

$$\Delta \vec{s} = \int \vec{v} \cdot dt \quad \Delta \vec{s} = \vec{a} \cdot v \cdot dt$$

## 6. Fehlerkorrektur

Bereits weiter oben wurde gesagt, dass eine Computersimulation bei weitem nicht so genau ist, wie die Realität. Das liegt vor allem am begrenzten Auflösungsvermögen in der Simulations-Welt. Dadurch entstehen bei den Berechnungen Fehler, die sich unterschiedlich äußern können. Ein recht lästiger Fehler ist zum Beispiel, dass die Position des Pendels nicht exakt auf der Kugelschale um die Aufhängung bleibt. Der starre Stab, der als Pendelfaden fungiert, wird also gedehnt und gestaucht !?

Um größere Probleme mit dieser Ungenauigkeit zu vermeiden wird der Pendelkörper nach jeder Berechnung optional durch eine Manipulation der z-Komponente wieder exakt auf die Kugelschale gesetzt (was natürlich einen noch größeren Fehler verursachen kann) und entsprechend wird auch die Geschwindigkeit in z-Richtung der Positionsänderung angeglichen.

Diesen Korrekturmodus kann man wahlweise einschalten und einige weitere Zeilen Programmcode an dieser Position sorgen dafür, dass man den entstehenden Fehler, beziehungsweise die Stärke der Korrektur auf dem Bildschirm verfolgen kann (siehe auch Kapitel IV.3.1). Ich erwähne die Fehlerkorrektur hier nur, da ich im Kapitel IV darauf zurückgreifen werde und, um den entsprechenden Teil im Gesamtlisting <sup>Disk</sup> kurz zu erläutern. An dieser Stelle werde ich nicht weiter darauf eingehen.

```

.
.
.
end;

```

Die Prozedur [Berechnung] allein wäre bereits die ganze Simulation, wenn sie immer wieder aufgerufen werden würde. Allerdings wäre das Ergebnis nicht sichtbar, weshalb noch etwas auf dem Bildschirm ausgegeben werden sollte.

## 7. Graphische Ausgabe & Analysen

Ich will mich auch hier nicht zu lange aufhalten, da dies hier das Thema dieser Arbeit nur peripher tangiert. Dennoch ist dieser Teil für das Verständnis des Programms auf der Diskette wichtig.

Speziell am Anfang des Programmlistings werden Sie eine Menge Funktionen finden, die für die Grafikausgabe verantwortlich sind. Dadurch müssen die Hauptprozeduren nur verständlich machen, wo ein Punkt im Raum zu setzen ist, während sich diese Prozeduren um die Darstellung auf dem zweidimensionalen Bildschirm kümmern.

Die Grafikausgabe (in [NextStep]) wird immer abwechselnd mit der Prozedur [Berechnung] aufgerufen. Um durch diese Geschwindigkeitsbremse den Computer nicht zu überlasten, gibt es, wie erwähnt, neben dem realen Zeitschritt, in dem Berechnung und Bildschirmausgabe erfolgen, noch eine subjektive Zeit für die Simulation, die in Simulationen üblicherweise wesentlich langsamer läuft (im Programm einstellbar).

Das selbe gilt für die Analysen. Diese berechnen (oder laden) immer wieder die nächste Position des Pendels und erstellen daraus Diagramme und Grafiken. Die Analysen [Kräfte], [Potential] und [Startpunkte] berechnen mit der Prozedur [Berechnung] die benötigten Werte; andere Analysen brauchen Bahnen, die während einer früheren Simulation gespeichert wurden.

Leider kann ich in diesem begrenzten Rahmen nicht näher auf die Programmierung der Umgebung (2D-, 3D-Grafik, Einstellungen, Aufzeichnung, ...) für eine Simulation eingehen. Trotzdem sollte Ihnen das III. Kapitel die Grundlagen einer computergestützten Simulation der Realität nähergebracht haben.

## 2. Das Programm

### 1. Einheiten im Programm

Die Typen Extended, Integer u.s.w. enthalten keine Einheiten. Also deklarierst du hier selbige:

- Positionen werden relativ zum (Bildschirm-)Mittelpunkt 0,0 dreidimensional in Metern angegeben und gespeichert.
- Längen werden in Metern angegeben,
- Geschwindigkeiten in Meter pro Sekunde,
- Beschleunigungen in Meter pro Sekunde<sup>2</sup>,
- Kräfte in Newton,
- Massen in Kilogramm und
- Winkel im Bogenmaß.

### 2. Bedienung des Programms

Durch die verbreitete Windows-Oberfläche ist das Programm einfach zu handhaben. Hier finden Sie noch einige nützliche Hilfen zum Programm.

#### 1. Karte: Einstellungen

Auf der Karte *Einstellungen* werden die Bedingungen für den Versuch festgelegt. Auf der linken Seite sind die allgemeinen Optionen, auf der rechten Seite die Einstellungen für die Magnete.

Rechts unten finden sich die Schalter *Reset*, mit dem die Standardeinstellungen wiederhergestellt werden, der Schalter *Magnete im Kreis* ordnet so viele Magnete, wie recht oben eingetragen, auf einer Kreisbahn (Radius auf dem Schalter eintragen) um den Koordinatenursprung an, mit *Sichern* und *Laden* kann man eine Einstellung einfach auf der Festplatte speichern und später wieder verwenden. Mit *Szenario starten* schließlich wird die Simulation auf der Karte *Simulation* gestartet.

#### 2. Karte: Simulation

Die Karte *Simulation* ist die Zeichenfläche für den Versuch. Die Taste *Szenario* zeichnet nur die Magnete und die Aufhängung. Wie auf vielen Seiten dieses Programms findet sich in der linken oberen Ecke ein schwarzes Quadrat, mit dem die Schalter ausgeblendet werden können, um mehr Platz zum Zeichnen zu schaffen. Mit einem Klick auf *Info (Var)* bekommen Sie eine Tafel, auf der die aktuellen Werte des Pendels zu sehen sind und auf *Info (2)* gibt es zusätzlich zum normalen Bild vier weitere Bilder: Die Frontansicht, Seitansicht, noch einmal die Aufsicht, sowie, rechts unten, eine dreidimensionale Darstellung des Versuchs. Die Magnete werden hier nicht eingezeichnet und die Bewegungslinie ist nicht durchgehend, sondern für jeden Berechnungsschritt wird ein Punkt eingezeichnet. Wenn diese Punkte weit auseinander liegen, kann man von größeren Ungenauigkeiten bei der Berechnung ausgehen und man sollte eventuell den Pendelkörper schwerer, den Faden länger oder den Zeitschritt kürzer machen.

Ein Häkchen im Feld *Info (2)* bringt eine weitere Grafik, über die mehr in IV.3.1 zu finden ist, auf den Bildschirm.

### 3. Karte: Kräfte

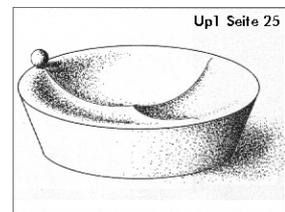
Auf der Seite *Kräfte* wird die Kraft auf den Pendelkörper in einem 10 x 10 Pixel - Raster berechnet, wobei die Geschwindigkeit des Pendels an jeder Stelle als 0 angenommen wird. Wahlweise kann man sich hier die gesamte, durch das Gewicht und die Magnete entstehende Kraft zeigen lassen, oder nur die Anteile, die senkrecht zum Faden wirken. Mehr dazu finden Sie im Kapitel II.2 "Die Wirkung der Kräfte". Der Maßstab für die Bilder kann bei den *Einstellungen* verändert werden.

### 4. Karte: Potential

Die Seite *Potential* berechnet aus den Kräften in einem einstellbaren Raster (*Genauigkeit*) das jeweilige Potential eines Punktes bezogen auf den Koordinatenursprung. Mit der Option *Streifen* läßt sich (sofern *farbig* ausgeschaltet ist) einstellen, wie klein die Potentialunterschiede sein müssen, um mit einer Farbe gezeichnet zu werden. Ist der Balken ganz links, so wird nur eine Farbe verwendet. Weitere Einstellungen können die Grafik den Erfordernissen anpassen.

**Warnung:** Bei hoher Auflösung (*Genauigkeit*) sollten Sie mit längeren Wartezeiten rechnen.

Die Potential-Grafik dient einer besseren Vorstellung von den Kräften, die im System wirken. Dieses Diagramm kann man sich bildlich als eine mit Sand gefüllte Schüssel vorstellen, in der eine Kugel (der Pendelkörper) rollt. An Abhängen (Potentialgefälle) wird die Kugel beschleunigt, aufwärts (Potentialberg) wird sie gebremst.



### 5. Karte: Analysen

Auf dieser Karte finden Sie zuerst unter *Spur/Dichte* eine Funktion zur Wiedergabe von bis zu 3 gespeicherten Bahnen in einer Grafik. Mit der Option *Pausen* (entspricht dem Zeitschritt) geben Sie an, wie langsam die Spuren wiedergegeben werden. Die Option *Aktuelle Umgebung* blendet die zur Zeit aktiven Magnete und die Aufhängung ein. **Achtung:** Das ist häufig nicht die gleiche Umgebung, wie die, in der die Simulation aufgezeichnet wurde! Laden Sie gegebenen Falls die entsprechenden Einstellungen.

Die Option *Dichte* zeichnet eine Spur nach, genauso wie die normale Wiedergabe, dabei durchläuft die Spur aber ein Raster und färbt die Felder dunkler. Dadurch ergibt sich ein Diagramm, das zeigt, wie oft und wie lange sich das Pendel an einer bestimmten Stelle aufgehalten hat.

Die Analyse *Startpunkte* bestimmt die "Einzugsgebiete" des Magnetpendels. Mehr dazu finden Sie im IV. Kapitel.

Um die Analysen auf der Karte *Poincaré-Schnitt* nutzen zu können muss bei der Karte *Spur/Dichte* zumindest im obersten Feld eine gültige Spur eingetragen sein (Laden mit dem Button "<" rechts des Feldes).

Diese Aufzeichnung wird dann für die Analysen verwendet.

Wer dem Computer nicht vertraut und den Poincaré-Schnitt auch gerne auf reale Experimente anwenden möchte, der braucht eine Videokamera, eine Schnittstelle zwischen Kamera und Computer, den realen Versuchsaufbau und viel Zeit.

Sobald der Versuchsverlauf (so weit als möglich von oben) gefilmt wurde und als AVI-Video (Größe: 320x240) in einer Datei vorliegt, können Sie die Bahn auf der Karte *Spur eingeben* Punkt für Punkt digitalisieren. Je nach der Versuchsdauer, der Rate der Bilder pro Sekunde und der Schrittweite (Bilder pro Digitalisier-Schritt) ist das mehr oder weniger Arbeit. Danach steht die Bahn unter einem oben angegebenen Namen zur Verfügung, genauso, als wäre sie in einer Simulation berechnet worden.

## Kapitel IV - Ergebnisse des Programms und Analyse

### 1. Wie erklärt man die Ergebnisse in der Realität

Im Kapitel I stand, dass man zur Analyse des Magnetpendels weitere Werkzeuge braucht. Durch die Computersimulation stehen uns diese jetzt zur Verfügung. Doch zurück zum realen Versuch.

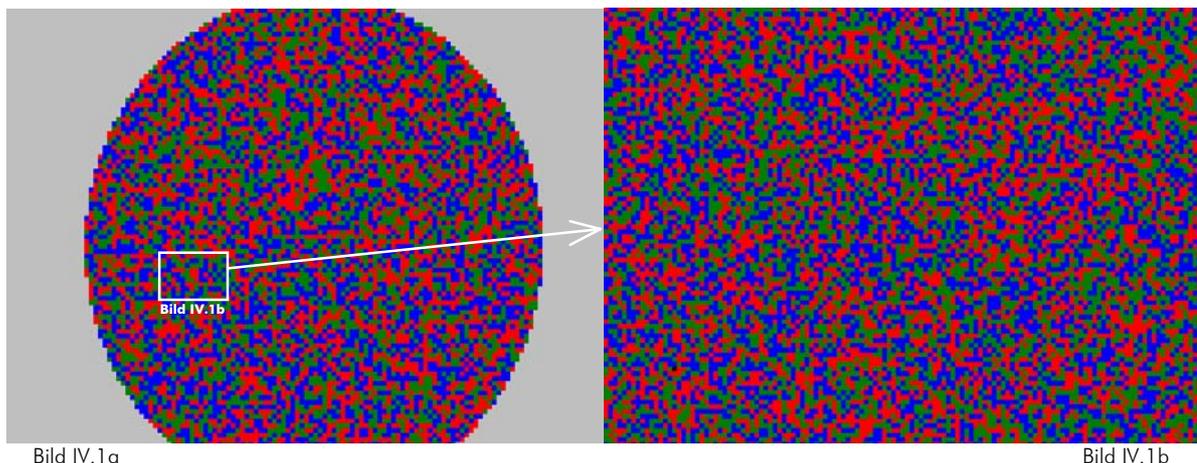
Hier war die essentielle Beobachtung am Magnetpendel jene, dass das Ergebnis eines Versuchslaufes sich nicht einfach vorhersagen und reproduzieren läßt. Man kann natürlich versuchen, das Pendel zweimal von ein und der selben Stelle zu starten, doch häufig kommt es dabei über verschiedenen Magneten zum stehen.

Wenn der Computer eine Hilfe sein soll, dann muss sich dieses Verhalten doch auch damit erklären lassen. Rufen Sie sich bitte an dieser Stelle noch einmal die Grafiken über die schwache und starke Kausalität ins Gedächtnis. Wenn man die Simulation zweimal mit den exakt gleichen Einstellungen eine Bahn berechnen läßt, so kommt sicherlich beide Male genau die gleiche Bahn des Pendelkörpers heraus. Das liegt ganz einfach an der Eindeutigkeit aller verwendeten mathematischen Operationen. Die schwache Kausalität ist also erfüllt.

Abgesehen von diversen, bisher nicht mathematisch erfassten Quantenphänomenen, ist auch das reale Pendel physikalisch gesehen an die schwache Kausalität gebunden. Ein anderer Bahnverlauf kann also nur durch geänderte Bedingungen erklärt werden.

Diese Tatsache ist auch schon im Bild I.2e mit 2 verschiedenen Startposition des Magnetpendels zu sehen. Doch wie weit müssen 2 Punkte eigentlich auseinander liegen, damit das Pendel über verschiedenen Magneten zum stehen kommt ?

Diese Frage gebe ich an das Computerprogramm weiter. Ich lasse es in einem Raster von 10x10 Pixel jeweils das Pendel starten und an die Startstelle einen farbigen Punkt malen, der angibt, wo das Pendel schließlich zum stehen kam (Bild IV.1a). Dieses Diagramm entspricht dann den Bildern I.2a, I.2b und I.2d im I. Kapitel mit der Ursachen- und Wirkungsebene. Diese farbige Darstellung dürfte in diesem Fall jedoch weit übersichtlicher sein:



Schwarze Punkte stehen dafür, dass das Pendel von diesem Startpunkt aus unter der Aufhängung stehen geblieben ist.  
Rosa Punkte deuten auf einen Fehler bei den Berechnungen hin, alle anderen farbigen Punkte stehen für den Magneten, über dem das Pendel jeweils stehen blieb.

Diese Berechnungen sind im Programm auf der Karte *Analysen* unter *Startpunkte* möglich. Hier einige Erläuterungen dazu.

### Analysen - Startpunkte

Hier können Sie den Computer arbeiten lassen. Ich weise zuerst einmal darauf hin, dass Berechnungen, die Sie hier machen lassen, häufig länger als eine Stunde benötigen (Pentium II 233). Geben Sie dem Computer einen Bereich an, in dem er seine Berechnungen anstellen soll, dazu mit *Genauigkeit* die Auflösung [Pixels]. Der Computer muss des weiteren noch wissen, ab wann ein Magnet über einem Magneten steht. Dazu zählt er mit, wie viele Berechnungen das Pendel einem bestimmten Magneten am nächsten war. Geben Sie bitte auch hierzu eine Zahl ein. Wenn sie im Bereich von einer Stunde Berechnungszeit bleiben wollen, dann sollten Sie die Reibung stärker einstellen (ca. 0,1) und, um einen Abbruch zu vermeiden ist es zu empfehlenswert, die Korrektur einzuschalten. Wenn Sie auf *Berechnung* klicken wird das Diagramm erstellt. Der Computer belegt dafür alle Ressourcen. Eine andere Arbeit ist also währenddessen nicht möglich !

Zurück zum Thema: Das Bild IV.1b (Breite entspricht ca. 10 cm) zeigt, wie empfindlich das Pendel schon auf kleinste Veränderungen (Raster: ca. 0,7mm) reagiert. Die weitere Vergrößerung in Bild IV.1c zeigt einen Bereich von 0,2 x 0,15 mm (=ca. 1/5 Punkt des Diagramms IV.1b).

Die Punkte sind hier in einem Raster von ca. 2  $\mu$ m angeordnet.

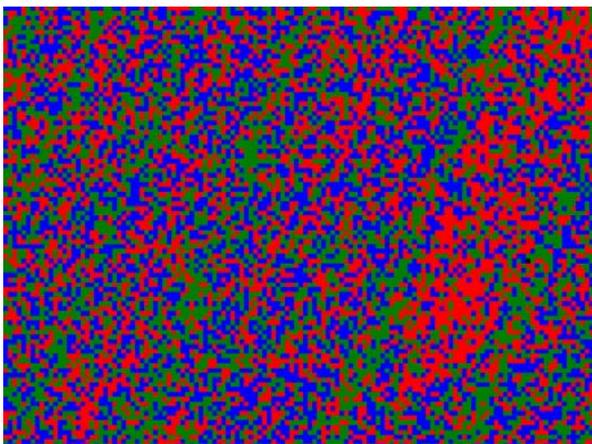


Bild IV.1c

Hier lassen sich erste "Felder" einer bestimmten Farbe erkennen. Damit ein echtes Pendel zweimal gesichert zum selben Magneten kommt, müsste man es folglich auf einige Mikrometer genau starten (keine anderen Störungen vorausgesetzt). Diese Simulation wurde zudem noch mit großer Reibung berechnet. Echte Versuche würden länger laufen und "Felder", wie links im Bild ergäben sich vielleicht erst bei einer weiteren 10000fachen Vergrößerung !

Damit ist auch klar, warum man es in der Realität kaum schafft, einen Versuch zweimal genau gleich durchzuführen.

## 2. Sensitivität

Bisher bin ich nur darauf eingegangen, warum es kaum möglich ist, in der Realität ein und die selbe Bahn zweimal zu erhalten. Doch weiterhin ist unklar, warum das System "Magnetpendel" so empfindlich auf winzige Veränderungen reagiert - hier einige Beispiele:

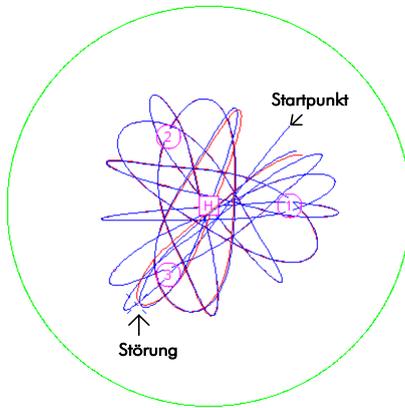


Bild IV.2a

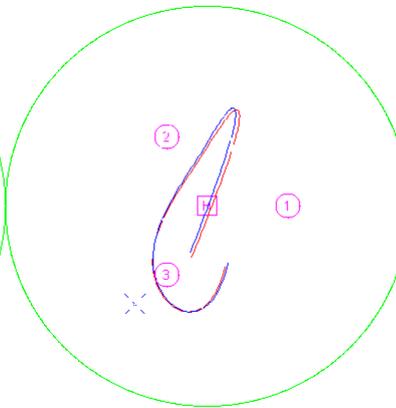


Bild IV.2b

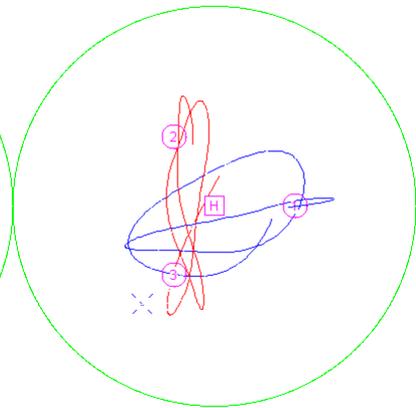


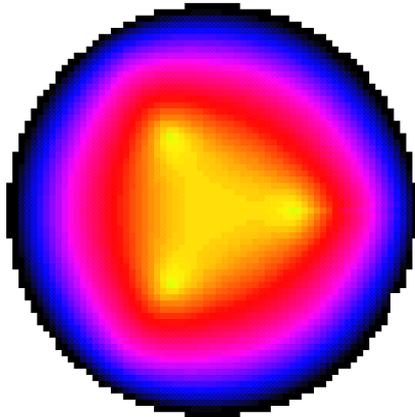
Bild IV.2c

Im Bild IV.2a sehen Sie zwei Bahnen mit gleichem Anfangspunkt, jedoch wirkt auf die blaue Bahn kurz nach dem Start für 5 Millisekunden eine Kraft von  $1/1000$  Newton in Richtung der x-Achse. Das könnte einem Schmetterling, der gerade vorüberfliegt entsprechen.

Die Kugel wiegt in diesem Versuch 0.5 Kilogramm! Dennoch gehen die zwei Bahnen bereits nach kurzer Zeit auseinander. Das Bild IV.2b zeigt die Stelle, an der sich die Bahnen trennen noch einmal als Ausschnitt. Dass diese Bahnen auch nicht mehr zusammenlaufen sieht man im Bild IV.2c, welches beide Bahnen einige Sekunden später zeigt.

Zuerst bleiben die Bahnen zusammen. Ab einem bestimmten Punkt aber laufen sie schnell auseinander. Wenn man den selben Versuch ohne Magnete macht, so bleiben die Bahnen beisammen. Was ist durch die Magnete also verändert worden ?

Am anschaulichsten wird die Veränderung, wenn man sich ein Potentialdiagramm des Systems erstellen läßt. Hierbei berechnet das Programm jeweils das Potential eines bestimmten Punktes, indem es den Weg zum Mittelpunkt (0|0|z) entlang der Kugelschale in kleine Strecken unterteilt und jeweils die längs des Weges wirkende Kraft bestimmt. Die Summe der kleinen Potentiale (=Strecke • Kraft längs der Strecke) ergibt das Gesamtpotential eines Punktes zum Mittelpunkt.



Maximales Potential: 1.513Joule  
Minimales Potential: -0.047Joule

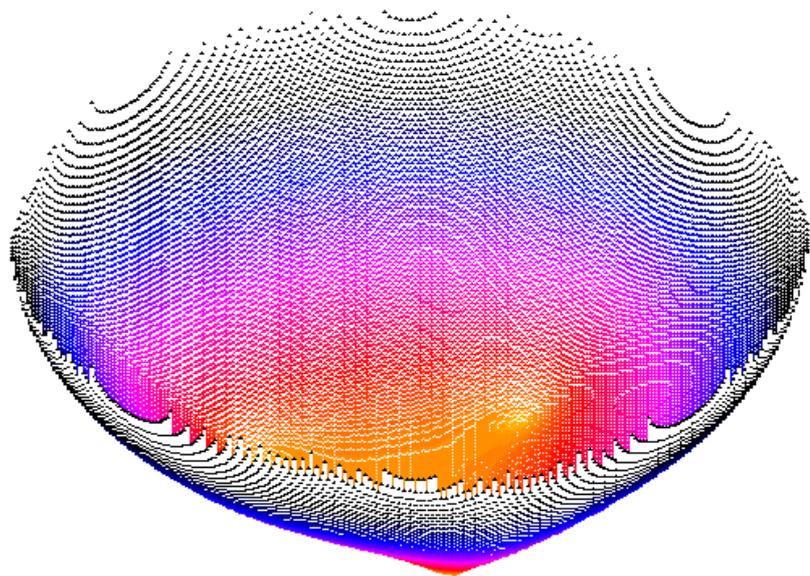
Bild IV.2d

Die Magnete erkennt man an den "Löchern". Durch die Gewichtskraft dagegen ergibt sich die Form eines Paraboloids Siehe Det Seite 154.

Durch die "Dellen" der Magnete wird das System also so empfindlich gegenüber den kleinen Veränderungen ?!?

Während das Bild IV.2d das Potential farbig in der Aufsicht präsentiert, sehen Sie in Bild IV.2e eine entsprechende Umrechnung in den dreidimensionalen Raum. Diese Darstellung kann man sich als eine entsprechend geformte Fläche vorstellen, auf der eine Kugel rollt (Siehe Kapitel III.2.2).

Bild IV.2e



Eine kleine Veränderung in den Bedingungen macht dieses Verhalten noch anschaulicher: Wenn man die Weicheisenkugel am Pendel durch einen Magneten ersetzt, so kann man auch abstoßende Kräfte erzeugen. Entsprechend entstehen dann im Potential-Diagramm kleine Hügel (Bild IV.2f).

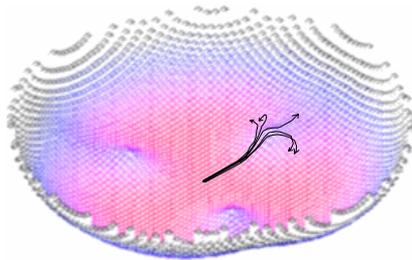


Bild IV.2f

Die Bewegung einer Kugel, die auf eine Anhöhe rollt ist leicht nachvollziehbar (Bild IV.2g <sup>Det S.153</sup>). Genauso die Bewegung bei einem runden Hügel (Bild IV.2h <sup>Det S.153</sup>). Der entscheidende Unterschied zwischen den beiden Bahnverläufen ist, dass im zweiten Fall eine enorme Streuung auftritt, wodurch kleine Unterschiede wie durch eine Lupe vergrößert werden.

Das gleiche gilt natürlich auch für die Löcher der anziehenden Magnete. Löcher beziehungsweise Hügel gibt es übrigens nicht nur bei den Magneten, sondern auch dazwischen (Bild IV.2i). Hier erwartet die Kugel eine Gratwanderung, bei der kleinste Unterschiede darüber entscheiden, wohin die Kugel rollt.

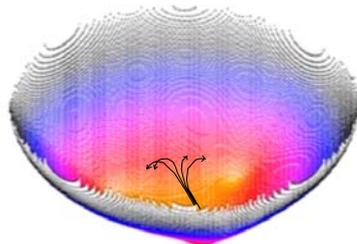
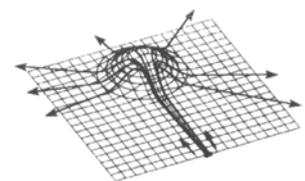
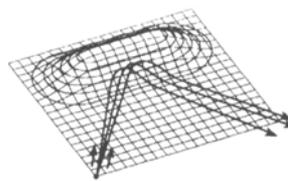


Bild IV.2i

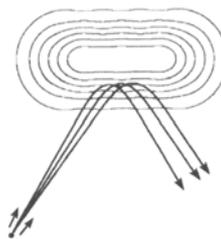


Bild IV.2g

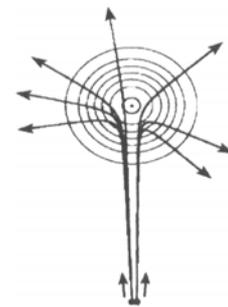


Bild IV.2h

Durch die Magnete entstehen also einerseits einige Orte labilen Gleichgewichts, an denen die Kräfte zwischen zwei Magneten vom Betrag her gleich sind <sup>Up1 Seite 21</sup>, andererseits streuen die Magnete selbst den Bahnverlauf. Durch beides werden kleine Abweichungen verstärkt. Genau das macht die hohe Sensitivität des Systems aus.

Es gibt Möglichkeiten, die Sensitivität eines Systems mathematisch zu beschreiben. Damit kann man beispielsweise verschiedene Systeme vergleichen oder man kann berechnen, für welche Zeitdauer sich das Verhalten eines Systems mit welchem Fehler vorhersagen läßt.

Abgesehen davon, dass diese Berechnungen in einem dreidimensionalen System relativ umfangreich wären, haben sie für das Magnetpendel auch kaum Informationsgehalt. Deshalb habe ich dieses Thema hier nicht weiter behandelt. Weiterführende Informationen können Sie in Det Seite 35f. oder unter dem Stichwort Lyapunov-/Liapunov-Exponent finden.

### 3. Analyse-Ansätze zur Beschreibung des Chaos

Warum das Verhalten des Magnetpendels sich nicht einfach vorhersagen läßt, wie man das von einem physikalischen Versuch üblicherweise gewohnt ist, kann vom physikalischen Standpunkt aus also einfach erklärt werden. Doch die Chaosforschung würde nicht als eigenständige Forschungsrichtung gelten, würde sie nicht auch versuchen, das chaotische Verhalten von solchen Systemen näher zu beschreiben, es zu charakterisieren und es mit anderem, ähnlichem Verhalten zu vergleichen.

#### 1. Regelmäßigkeiten im chaotischen Verhalten

##### Ergebnisse durch Fehler

Im III. Kapitel habe ich geschrieben, dass der Computer nur ein begrenztes Auflösungsvermögen hat, wenn es um die Erfassung, Speicherung und Verrechnung von Werten geht. Dadurch entstehen natürlich Fehler in der Berechnung.

Unter anderem entstehen dadurch Abweichungen der festen Länge des Aufhängefadens zu der Entfernung des Pendelkörpers von der Aufhängung (siehe auch Anhang A1). Um diesen Fehler zu umgehen, damit dieser sich nicht unkontrolliert vergrößert, habe ich einen weiteren "Fehler" eingebaut: Nach jeder Berechnung der neuen Position wird die z-Koordinate der Position automatisch wieder so berechnet, dass das Pendel wieder auf der Kugelschale um die Aufhängung ist. (Zu finden ist diese Berechnung in einer neuen Form am Schluß der Prozedur Berechnung. Im III. Kapitel finden sich ebenfalls einige Anmerkungen zu dem Thema).

$$\Delta z = \sqrt{\text{Pendellänge}^2 (\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Ein Problem ergab sich eigentlich erst mit der Analyse der Startpunkte. Da dabei viele Simulationen mit zum Teil sehr langen Versuchsläufen (bei niedriger Reibung) durchgeführt wurden trat hier regelmäßig ein Fehler auf, der auf die Multiplikation sehr großer Zahlen (-> Overflow) zurückzuführen war. Zugleich erhielt das Pendel anscheinend Energie. Das äußerte sich darin, dass der Ausschlag (bei Berechnungen ohne Reibung) schnell größer sein konnte, als beim Loslassen des Pendels (Bild IV.3.1a - bitte beachten Sie: Punkt 1 wurde vor Punkt 2 erreicht).

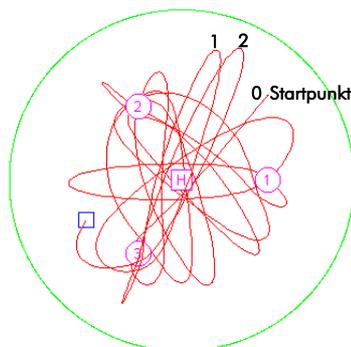


Bild IV.3.1a

Das Problem ist inzwischen gelöst, von der Fehlerbehebung übrig geblieben ist ein neues Anzeigeelement, mit dem sich der zeitliche Verlauf eines Versuchs etwas übersichtlicher darstellen läßt - das Info (2) - Panel.

Dieses sieht aus, wie in Bild IV.3.1b:

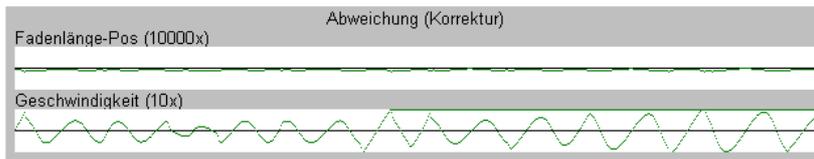


Bild IV.3.1b

Hinweis zu den Bezeichnungen:

Der Ausdruck 10000x [10x] bedeutet, dass  $\frac{1}{10000} \text{ m}$  [ $\frac{1}{10} \text{ s}$ ] einem Pixel entspricht.

Man bekommt es auf der Seite *Simulation*, wenn man das Kästchen *Info (2)* aktiviert und dann eine Simulation startet. Normalerweise entspricht ein Pixel der Zeit-Achse im Diagramm einem Berechnungsschritt.

Auf der Seite *Einstellungen* läßt sich eine *Zeit-Stauchung* für die Anzeige einstellen. Dadurch kann ein längerer Zeitraum betrachtet werden (Bild IV.3.1c).

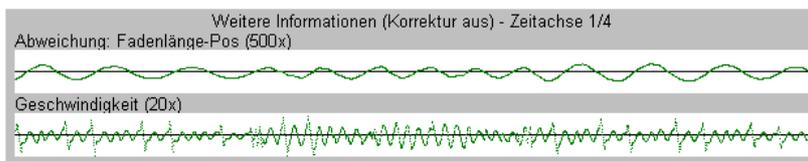


Bild IV.3.1c

Wesentlich interessanter als die Abweichung der Fadenlänge im oberen Fenster (die jetzt wahlweise mit der Korrektur dauerhaft unter ca. 0,02% gehalten werden kann) ist das Geschwindigkeitsdiagramm - siehe Bild IV.3.1e

Da man den zeitlichen Verlauf leider nicht sehen kann sehen Sie hier einige (nachbearbeitete) Bildschirmabdrücke aus dem Programm (Bild IV.3.1 d).

Beachten Sie bitte die immer wiederkehrenden Muster im Bahnverlauf !

Ähnliche Bahnen sind gleichfarbig gekennzeichnet. Diese Darstellung erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit, noch sind gleichfarbig markierte Bilder absolut identisch. Lediglich das menschliche Gehirn als geübter Mustererkenner erlaubt es, hier Ähnlichkeiten zu erkennen !

Ich habe versucht, möglichst sinnvolle Bilder auszuwählen, die zudem für den Pendelverlauf repräsentativ sind. Die Anordnung ist chronologisch, die genaue zeitliche Einordnung ist aus dem unteren Diagramm (Bild IV.3.1 e) zu entnehmen.

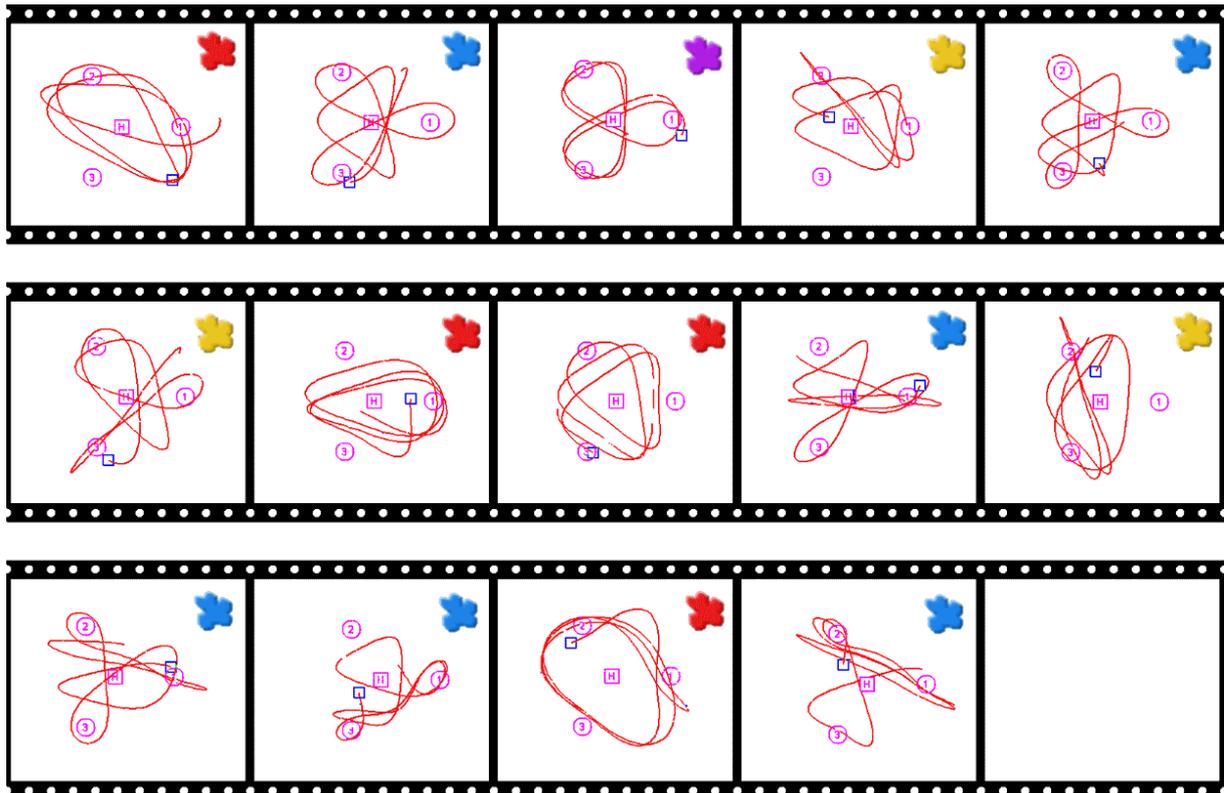


Bild IV.3.1 d

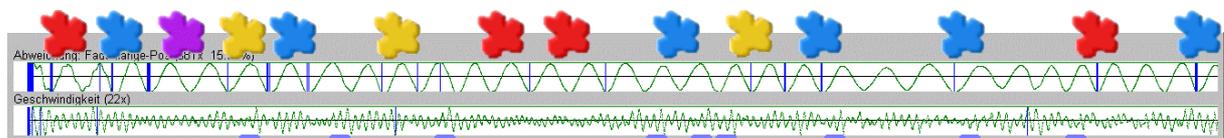


Bild IV.3.1 e

Im Diagramm IV.3.1e ist neben dem chronologischen Verlauf der Bilder auch im unteren Teil die jeweilige Geschwindigkeit des Pendels in z-Richtung zu sehen. Wie beim Bahnverlauf sind auch hier Strukturen immer wieder zu erkennen - blau markiert sind die Folgen von jeweils 2 kleinen Ausschlägen und einem großen.

Selbstverständlich ist dieser Überblick hier von mathematischen Begründungen noch weit entfernt - doch er zeigt recht eindrucksvoll, dass auch sogenannte chaotische Systeme gewissen Mustern folgen.

Was für weitere Analysen fehlt, ist ein Verfahren zur Datenreduktion...

## 2. Datenreduktion

Die Datenreduktion ist eine Form der Abstraktion. Sie versucht, möglichst alle Details aus den Daten zu entfernen, damit weniger, aber dafür aussagekräftigere Daten entstehen. Diese Daten sind dann übersichtlich genug, um objektive, mathematisch begründbare Vergleiche anstellen zu können.

- In der Bilderkennung werden die Daten (also das Bild) häufig gerastert, oder es wird versucht, das Bild in einfache Formen (wie Kreise, Geraden, ...) zu zerlegen. Die allseits bekannten Registrierkassen mit Laser-Abtastung der Etiketten funktionieren zum Beispiel so.
- Oft läuft es auch darauf hinaus, ausschließlich wichtige Muster zu finden. Als Beispiel ist hier die elektronische Erkennung von Fingerabdrücken anzuführen.

Eine andere Form der Datenreduktion ist es, als Werte jeweils nur die Position und Geschwindigkeit des Pendelkörpers zu registrieren. Dieses nennt sich dann Phasenraum <sup>Def Seite 41</sup>. Bei einem zweidimensionalen Pendel ist das sehr anschaulich, da man für die Darstellung lediglich die (Winkel-)Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Position (Winkel der Auslenkung) antragen muss. Als Ergebnis erhält man eine Relation, die wie in Bild IV.3.2a aussehen könnte.

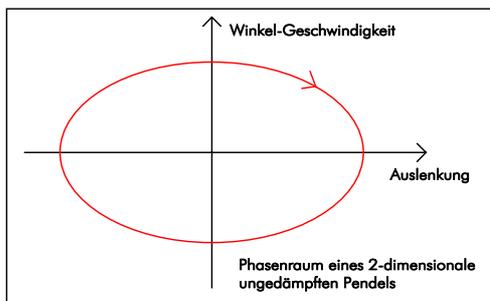


Bild IV.3.2a

Der Pfeil deutet an, in welcher Richtung entlang des Graphen die Daten erfasst werden. Winkelgeschwindigkeit wird in Auslenkung umgesetzt (siehe **Richtungspfeil**), und weil ein normales Pendel (bei kleiner Auslenkung) annähernd harmonische Schwingungen ausführt, ist der Phasenraum ein gestauchter Kreis <sup>siehe Def Seite 40 f.</sup>.

Die Gesamtenergie lässt sich dabei zu jedem Punkt im Diagramm bestimmen:  $E_{\text{Ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$

Die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  ist proportional zur Auslenkung. Je größer also die Auslenkungs- beziehungsweise die Geschwindigkeitskomponente ist, desto größer ist die Gesamtenergie. Staucht man das Diagramm nun auf Kreisform, so ist die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkt (Energie=0) gleichbedeutend mit der Energie des Pendels an diesem Punkt des Phasenraums.

Wenn nun Reibung vorliegt, so wird die Energie, also die Entfernung vom Mittelpunkt stetig geringer (vorausgesetzt: "Kreisform"-Stauchung - siehe oben). Das dazugehörige (ungestauchte) Diagramm finden Sie im Bild IV.3.2b.

Entsprechend kann man sich ein angeregtes Pendel vorstellen, wobei die Reibung von seiner Geschwindigkeit abhängt. Das Pendel wird soweit abgebremst, bis die Reibung gleich der Anregung ist; dadurch stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein und die Gesamtenergie bleibt (siehe Bild IV.3.2c).

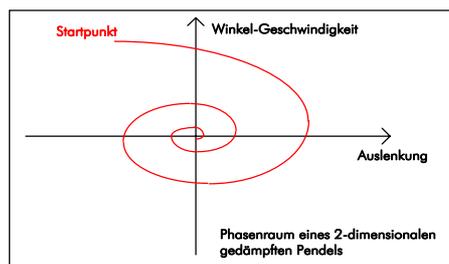


Bild IV.3.2b

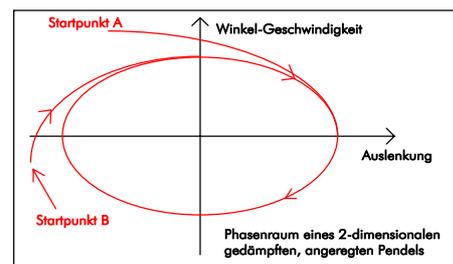


Bild IV.3.2c

### Attraktoren

Ich möchte auf das dritte Diagramm (IV.3.2c) etwas näher eingehen. Das Pendel wird gestartet, verliert Energie, bis es den Gleichgewichtszustand erreicht und bleibt dann (im Phasenraum) auf einer Bahn. Diese Bahn ist stabil und wird Attraktor genannt. Det Seite 42  
Ein anderer Attraktor liegt im zweiten Diagramm (Bild IV.3.2b) vor. Hier endet jede Kurve im Mittelpunkt. Damit ist der Mittelpunkt ein sogenannter Punktattraktor.

Natürlich sind Attraktoren nicht auf Ellipsen und Punkte beschränkt, sondern können praktisch jede beliebige Form annehmen.

Punktattraktoren, die ja meistens durch Energieverlust entstehen, liegen aus eben diesem Grund allgemein in Potential- beziehungsweise Energie-Minima.

Zurück zum eigentlichen Thema: Wie sieht der Phasenraum des dreidimensionalen Pendels aus ?

Die bezeichnenden Variablen dafür wären der Ort und die Geschwindigkeit - und diese sind jeweils dreidimensional. Für einen vollständigen Phasenraum bräuchte man also ein sechsdimensionales Diagramm, was sich aus physikalischen Gründen auf zweidimensionalem Papier leider nicht "wie gewohnt" darstellen läßt.

Bestimmt man nun die z-Komponente der Variablen jeweils aus den dazugehörigen x- und y-Komponenten, so bleibt der Phasenraum immer noch vierdimensional. In Grenzen könnte man das zum Beispiel mit der Hilfe von Farben (für die Geschwindigkeit) darstellen. Zwei Dimensionen wären dann die x- und die y- Komponenten. Wenn Sie nun an die Bahnkurven zurückdenken, die schließlich nur die x-y-Ortskoordinaten zeigten, dann ist es leicht einzusehen, dass ein "vierdimensionales" Diagramm hier nicht viel weiter helfen wird (Siehe Bild IV.3.2d).

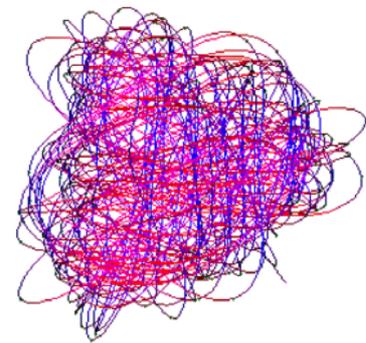


Bild IV.3.2d

### Der Poincaré-Schnitt Det Seite 74f., 154f.

Es müssen demzufolge noch mehr Daten entfernt werden.

Was bisher vorliegt, ist ein Diagramm mit 4 Dimensionen. Außer den gewohnten Kartesischen Koordinaten können die Dimensionen natürlich die Variablen genauso in Polarform darstellen - das bietet sich beim Magnetpendel deshalb an, weil der Pendelkörper auf einer Kugelschale um die Aufhängung, beziehungsweise (in der Projektion auf die x-y-Ebene) innerhalb einer Kreisscheibe pendelt.

Poincaré hatte nun die Idee, den Phasenraum zu schneiden, das vierdimensionale Diagramm wird also zum Beispiel mit dem Raum geschnitten, in dem die zentrifugale Geschwindigkeit, also die Geschwindigkeit vom Mittelpunkt weg  $v_z = 0$  ist. Das trifft immer dann zu, wenn das Pendel maximale potentielle Energie hat, also wenn die Bahn einen äußeren Umkehrpunkt erreicht.

Dadurch ergebe sich dann ein dreidimensionales Diagramm. So etwas nennt man Poincaré-Schnitt. Ein mögliches Ergebnis zeigt das Diagramm im Bild IV.3.2e. Je heller ein Punkt ist, desto geringer ist die Entfernung des Umkehrpunkts zum Mittelpunkt. Im Bild IV.3.2f rechts finden Sie die dazugehörigen Umkehrpunkte in der Draufsicht.



Bild IV.3.2e (verwendete Bahn: LANGLAUF <sup>Disk</sup>)



Bild IV.3.2f

Nach Bedarf kann die Entfernung der Position vom Mittelpunkt weggelassen werden und nur noch der Winkel der Auslenkung (in der x-y-Projektion) und die Winkelgeschwindigkeit angetragen werden.

Die Entfernung kann man deshalb vernachlässigen, weil die Gesamtenergie sich auch beim Magnetpendel aus potentieller Energie und kinetischer Energie zusammensetzt. Denkt man an das Potentialdiagramm zurück, so kann man unter einen bestimmten Winkel meist nur wenige mögliche Punkte mit einer entsprechenden potentiellen Energie ausmachen.

### Doch was bringt dieses Diagramm denn nun ?

Es "quantisiert" das Chaos im Bahnverlauf des Magnetpendels.

Dieses Ziel haben neben Poincaré auch andere Wissenschaftler mit anderen Methoden erreicht. Da die Methoden sich auf das Magnetpendel allerdings nicht ohne Weiteres übertragen lassen, nenne ich an dieser Stelle der Vollständigkeit halber lediglich einige andere Analyseansätze:

- Lyapunov liefert mit dem bereits erwähnten Lyapunov-Exponent ein Maß für die Sensibilität eines chaotischen Systems. Siehe Det Seite 116ff., ausführlich: Pn1 Seite 12ff.
- Feigenbaum wies nach, dass bei Iterationen gewisse Regelmäßigkeiten auftreten, nach ihm benannt ist das Feigenbaum-Diagramm, auch genannt das Bifurkationsszenario. Siehe Det Seite 52
- Kolmogorov und viele andere suchten nach einer mathematischen Beschreibung der "Turbulenz" eines Systems, dieser Ansatz wurde jedoch nie zu einem befriedigendem Ergebnis geführt. Siehe Pn1 Seite 20ff.
- Fourier-Analysen können in den Ergebnisse von chaotischen Versuchen häufig Strukturen oder quasiperiodisches Verhalten aufzeigen. Pn1 Seite 22ff.
- Ein Zustandsraum, eine Form mathematischer Beschreibung chaotischer Versuche über Differentialgleichungen, sorgt, wie das Poincaré-Diagramm auch für eine Datenreduktion. Hier wird, wie im Poincaré-Schnitt mit Attraktoren gearbeitet. Siehe Pn1 Seite 24ff.
- Sogenannte Billard-Modelle werden in Pn2 ab Seite 2 ausführlich behandelt.
- Die mathematischen Methode der fraktalen Dimension wird häufig für weitere Analysen von Chaos-Diagrammen genützt, sie wird im Kapitel IV.4 kurz erwähnt werden. Siehe Pn1 Seite 28

Natürlich gibt es noch wesentlich mehr Methoden zur Analyse chaotischer Systeme - doch zurück zum Poincaré-Schnitt. Zum besseren Verständnis des Poincaré-Schnitts braucht man den Vergleich mit nicht-chaotischen Bahnen...

### 3. Bahntypen und ihre Poincaré-Schnitte

Prinzipiell müssen ja nicht alle Bahnen, die man beim Magnetpendel erhält so chaotisch aussehen, wie die bisher gezeigten...

#### • Periodische Bahnen

Wenn eine Bahn nach einiger Zeit wieder genau den Ausgangszustand erreicht (Position und Geschwindigkeit in Betrag und Richtung), so wird in Folge der schwachen Kausalität wieder der selbe nächste Zustand, wie beim ersten Mal, folgen - und so weiter...

Das Resultat ist eine sich periodisch wiederholende Bahn.

Obwohl der Computer äußeren Einflüsse bereits ausschließt, ist es sogar hier praktisch nur schwer möglich, für periodische Bahnen exakte Startbedingungen zu bestimmen, da diese auf 19 Stellen genau angegeben werden müssten.

Annähernd periodische Bahnen, ihre Umkehrpunkte und dazugehörige Poincaré-Schnitte zeigen die folgenden Bilder (Bild IV.3.3a):

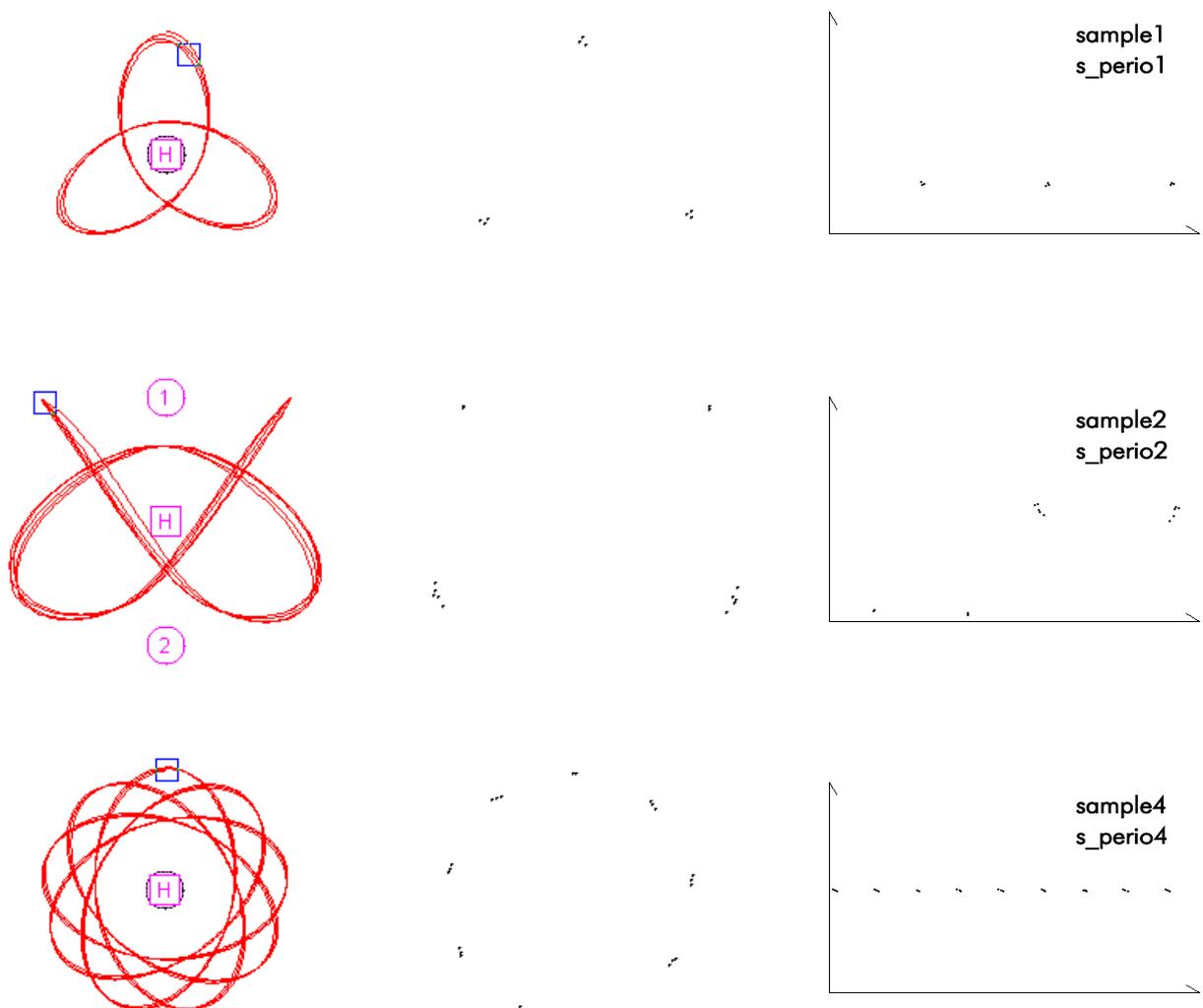


Bild IV.3.3a

Die Bezeichnungen rechts oben in den Poincaré-Diagrammen bezeichnen die entsprechenden Quellen der Bahnen (mehr im Anhang A2). In den Diagrammen sind die Achsenbezeichnungen aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingetragen (Bezeichnungen: siehe Bild IV.3.2a).

In den Bildern IV.3.3a sieht man sehr deutlich, dass aus der Punkt wolke bei chaotischen Bahnen einige Punkte geworden sind, die immer wieder getroffen werden.

Die leichten Abweichungen lassen sich dadurch erklären, dass die Bahnen sich nicht exakt wiederholen. Dadurch entsteht der nächste Bahntyp:

• Quasiperiodische Bahnen

Als Beispiel eignet sich eine Bahn, die schon bei den periodischen Bahnen zu sehen war (sample1), nach einiger Zeit klappt die Bahn nämlich um und wird quasiperiodisch (Bild IV.3.3a oben), andere Bahnen zeigen dieses Verhalten von Anfang an (Bild IV.3.3b Rest).

Das Umklappen ist darauf zurückzuführen, dass die Bahn sample1 nicht exakt periodisch ist.

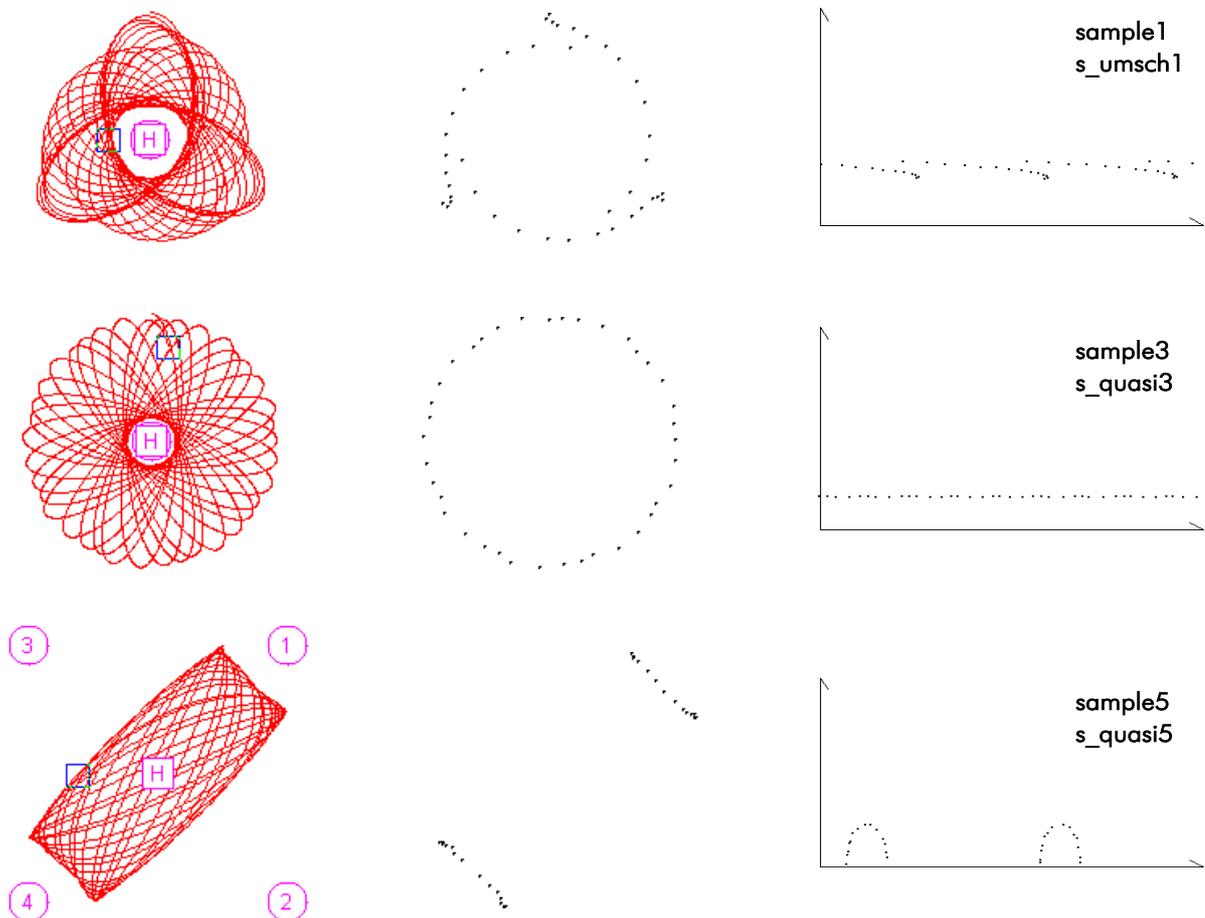


Bild IV.3.3b

Für quasiperiodische Bahnen sind diskrete Punktmengen Det Seite 154 im Poincaré-Schnitt kennzeichnend. Die Punkte ordnen sich in bestimmten Formen an, häufig sind dies gerade oder gebogene Linien, halbe oder ganze Kreise.

Noch einmal zu Vergleich:

• Chaotische Bahnen

Wenn eine Bahn in absehbarer Zeit nicht in sich selbst zurückkehrt (periodisch oder quasiperiodisch), so entstehen Bahnen, die häufig nach einiger Zeit viele der mit der Energie des Pendels erreichbaren Positionen überstrichen haben. Manchmal lassen sich Strukturen erkennen, die Gesamtheit wirkt allerdings eher chaotisch.

Der Poincaré-Schnitt zeigt hier neben den chaotischen Punktwolken auch die Strukturen:

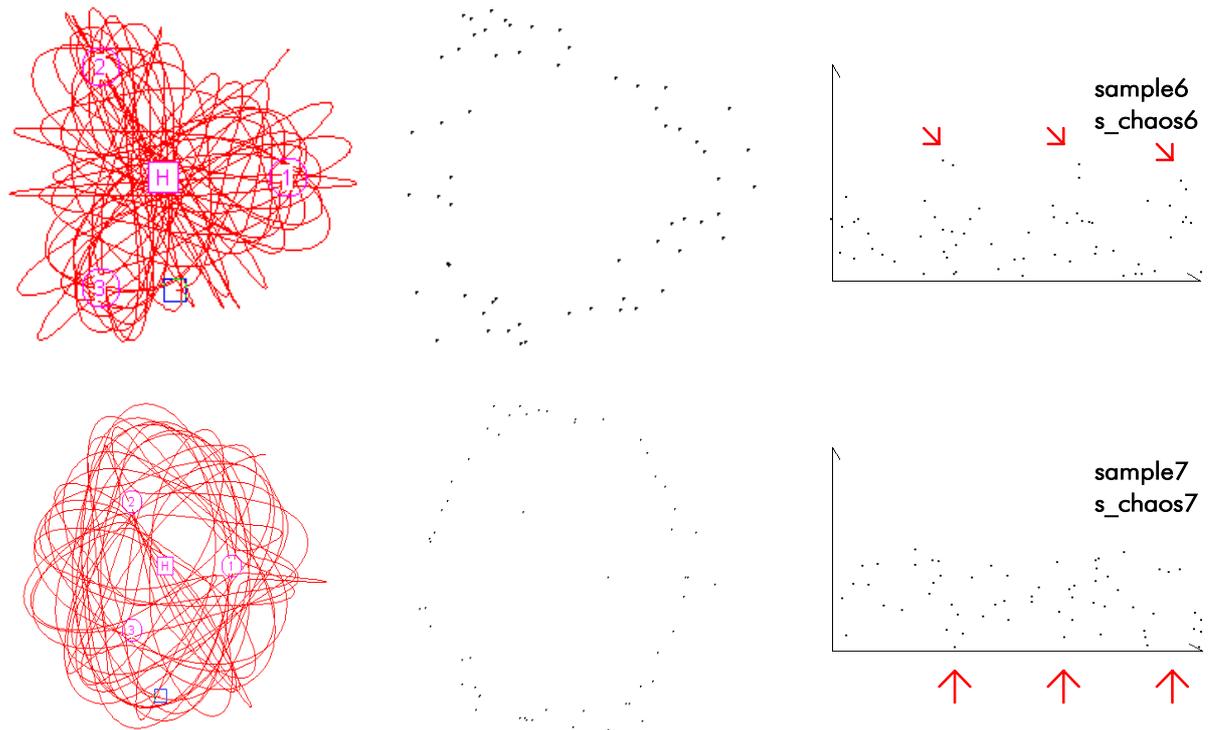


Bild IV.3.3c

Speziell im oberen Diagramm sieht man höhere "Ausschläge" bei bestimmten Winkeln. Die anziehenden Magnete beschleunigen das Pendel, also ist die Geschwindigkeit an diesen Stellen höher. Genauso sieht man im unteren Diagramm Punkte, die tiefer liegen, da das Pendel hier von den abstoßenden Magneten abgebremst wird.

In diesen vorliegenden Bahnkurven ist folglich immer noch ein gewisses Quantum an Ordnung. Der Poincaré-Schnitt kann helfen, diese verborgenen Strukturen zu finden.

Seltsame Attraktoren

Auch in diesen Poincaré-Schnitten gibt es "attraktive" Orte für die Punkte. Besonders deutlich wurden diese bei den periodischen und quasiperiodischen Bahnen. Da die Punkte hier aber keine geschlossenen Linien bilden, bezeichnet man diese bevorzugten Orte im Poincaré-Schnitt als seltsame Attraktoren.

Andere Versuche können die seltsamen Attraktoren wesentlich deutlicher zeigen, da dies den Rahmen des Themas allerdings sprengen würde, verweise ich zu näheren Informationen zu diesem Thema auf Det Seite 74ff.

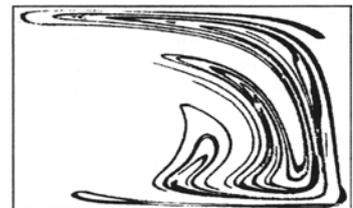
## 4. Fraktale und Chaos

“S. Großmann bezeichnete [die Selbstähnlichkeit] [...] als ein allumfassendes Prinzip der physikalischen Naturereignisse“. Sie ist “eines der deutlichsten Phänomene des deterministischen Chaos“ Det Seite 125.

Solch große Worte kann man natürlich nicht einfach ignorieren.

Sehr häufig wird in der Chaostheorie auf fraktale Strukturen eingegangen; so weisen zum Beispiel bei einigen Versuchen seltsame Attraktoren im Poincaré-Schnitt oder Feigenbaum-Diagramme Selbstähnlichkeit auf. Das bedeutet, dass manche Formen im Diagramm bei fortschreitender Vergrößerung immer wieder auftreten. Siehe Det Seite 52, 74, 125

Viele in entsprechenden Diagrammen auftretende Strukturen lassen sich durch sogenannte Bäckertransformationen Siehe Det Seite 78 erklären. Das soll bedeuten, dass die entstehenden Strukturen einem Teig ähnlich sind, den man oft ausgerollt und wieder zusammengeklappt hat (siehe Bild Iv.4z) - die entstandene Kurven zeigen Selbstähnlichkeit.

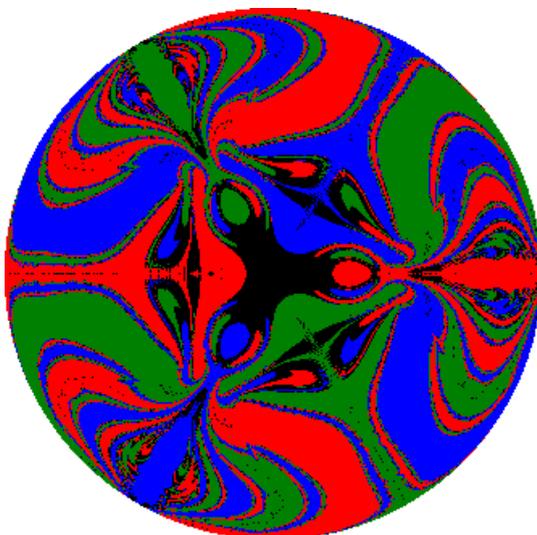


**Bild IV.4z** Det Seite 82

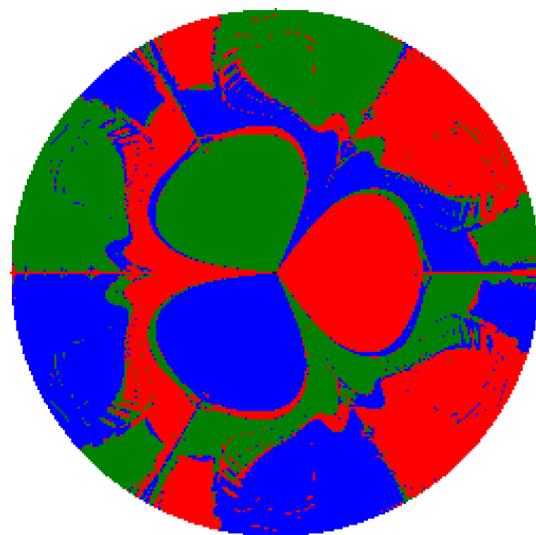
Ich will auf dieses Thema nur kurz eingehen:

Im Kapitel IV.1 waren sogenannte Einzugsgebiete zu sehen - eingetragen war, wo das Pendel stehenbleibt, wenn man es von einer bestimmten Position aus startet. Erhöht man die Reibung sehr stark, so hat das Pendel nicht genug Zeit, um die kleinen Unterschiede bei den Startbedingungen so stark zu vergrößern, wie es das “chaotische“ Verhalten zeigt...

Die Ergebnisse sehen sie im Bild IV.4a.



**Maximale Genauigkeit**  
Berechnungszeit ca. 8 Stunden  
Reibung 2  
Fadenlänge 25 Zentimeter



**Genauigkeit 8**  
Berechnungszeit ca. 4 Stunden  
Reibung 1  
Fadenlänge 55 Zentimeter  
Einstellungen: Einzug-Disk 1

Bild IV.4a

Eine Selbstähnlichkeit erhält man bei diesen Diagrammen nun, wenn man bestimmte Ausschnitte in den Bildern vergrößert berechnen läßt (Bild IV.4b, Bild IV.4c). Kennzeichnend für chaotische Einzugsgebiete sind außerdem die fraktalen Ränder der Flächen.

Der Sinn solcher Untersuchungen liegt wieder in einer Quantifizierung des Chaos. Mit der fraktalen Geometrie stehen seitens der Mathematik nämlich entsprechende Methoden zur Verfügung (Stichwort: fraktale Dimension) Cip Seite 213.

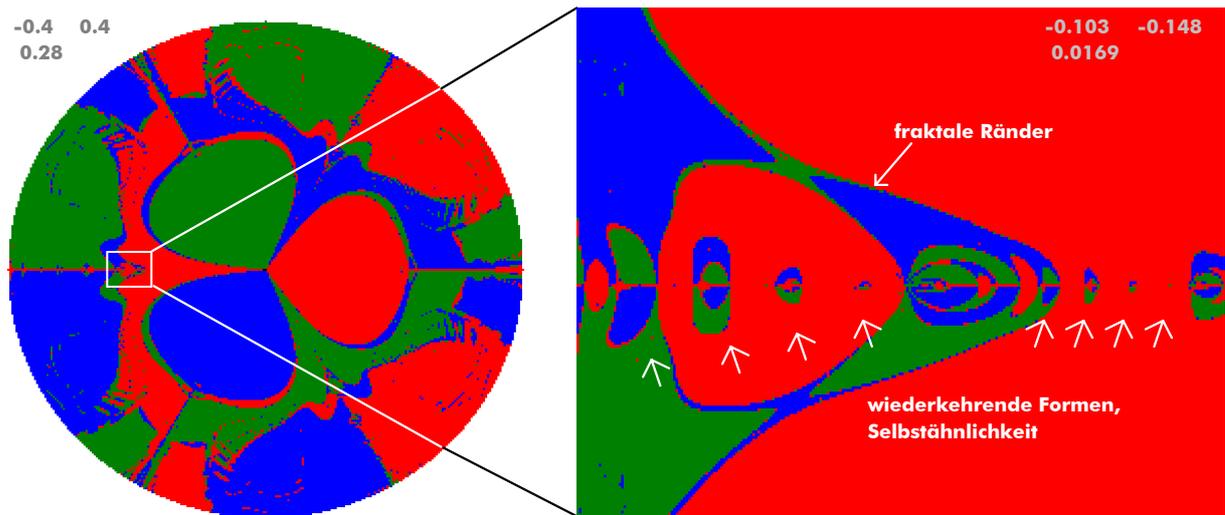


Bild IV.4b

Anmerkung zu den Bildern:

- Die Zahlen in den Ecken geben den Ausschnitt an, der berechnet wurde, manche Bilder (in Bild IV.4c) wurden im nachhinein zugeschnitten.
- Angegeben sind die x-Koordinaten (1.Zeile) und eine y-Koordinate (2.Zeile), die Bilder sind proportional, also ohne Stauchungen berechnet.
- Die verwendeten Einstellungen sind in Einzug-1.MPS Disk zu finden.



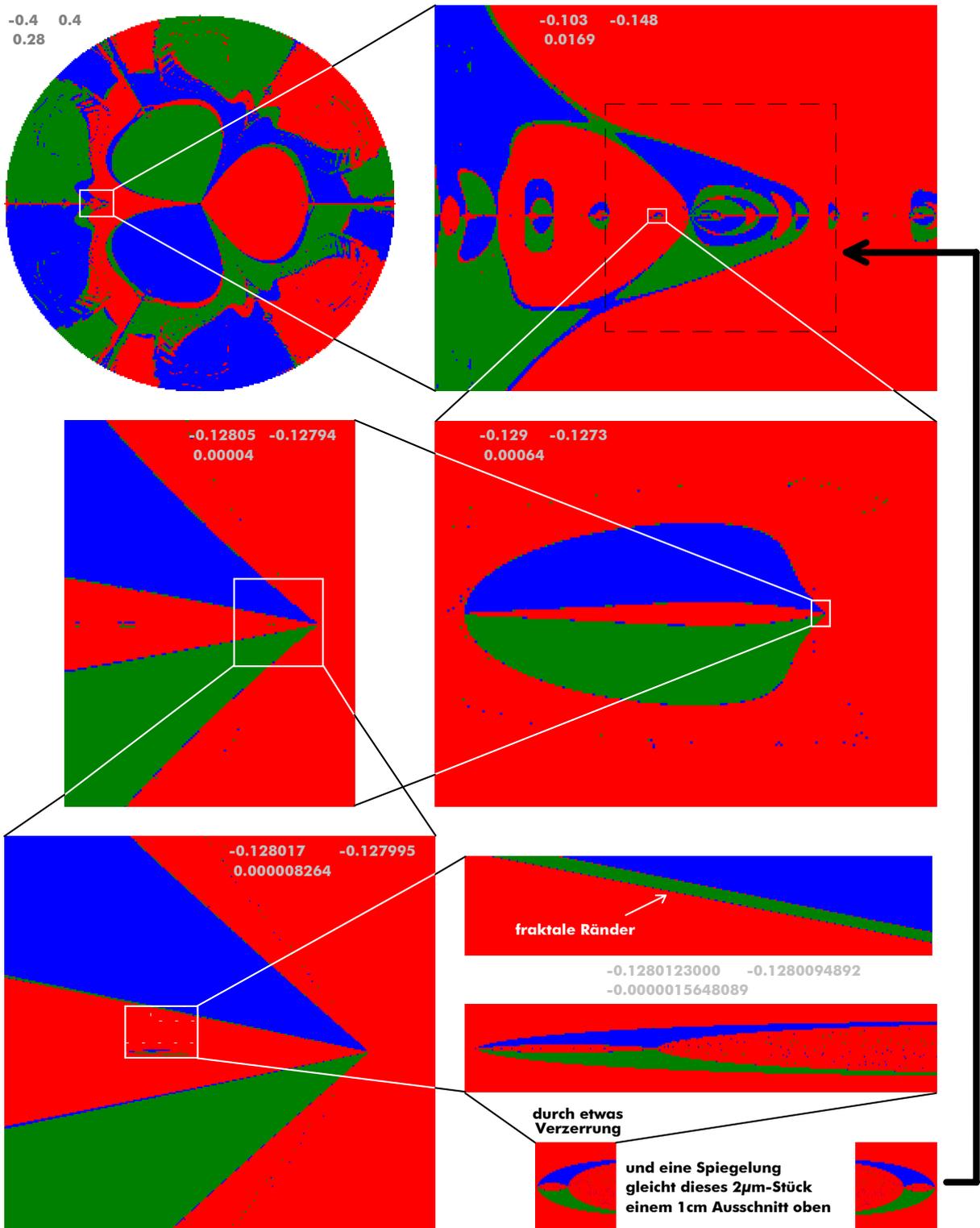


Bild IV.4c

Mit diesen ästhetisch beeindruckenden Bildern endet das IV. Kapitel.

Einige weitere Informationen und ein Quellenverzeichnis finden Sie im folgenden Anhang...

## Anhang A

Im Anhang finden Sie

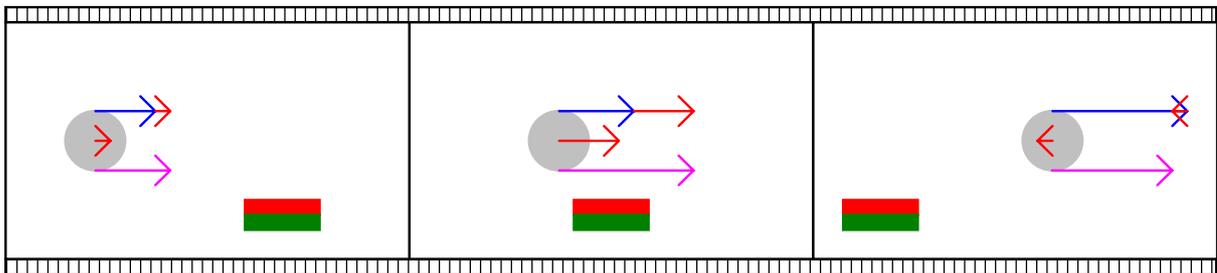
- Eine Übersicht, wie Näherungen bei den Berechnungen sich auf das Ergebnis auswirken (A1)
- Einige Anmerkungen zur beiliegenden Diskette (A2)
- Ein Quellenverzeichnis (B)

### A1 Fehler in der Berechnung

Ich habe des öfteren darauf hingewiesen, dass durch den Zeitablauf in kleinen Zeitschritten im Bereich von Millisekunden Fehler in den Berechnungen entstehen.

Darauf möchte ich in diesem Teil kurz etwas genauer eingehen:

Stellen Sie sich vor, das Pendel schwingt gerade auf einen Magneten zu, der eine Kraft auf das Pendel ausübt (Links). Eine Berechnung wird nun kurz vor dem Erreichen der maximalen Kraft (in Bewegungsrichtung des Pendels) durchgeführt (Mitte). Dabei wird das Pendel natürlich stark beschleunigt. Das Pendel sei nach einem weiteren Zeitschritt bereits wieder weit hinter dem Maximum der Kraft (Rechts), die Kraft sollte nun das Pendel zum Magneten zurückziehen und damit dessen Geschwindigkeit bremsen. Dadurch, dass das Pendel aber in der Berechnung vom Magneten schon wieder weiter entfernt ist, wirkt nur noch eine schwache bremsende Kraft.



**Kraft in Bewegungsrichtung  $\Leftrightarrow$  Geschwindigkeitsänderung**

Geschwindigkeit vorher

Geschwindigkeit nachher

Die Bilanz: Das Pendel wird stark beschleunigt, aber nur schwach gebremst. Die Geschwindigkeit wird insgesamt größer. Nach dem Energieerhaltungssatz ist das aber nicht möglich.

Das passiert natürlich genauso in umgekehrter Richtung, weshalb sich der Fehler normalerweise schnell wieder "korrigiert". Deshalb ist bei vernünftig gewählten Zeitschritten eine erkennbare Steigerung der Geschwindigkeit auch relativ unwahrscheinlich.

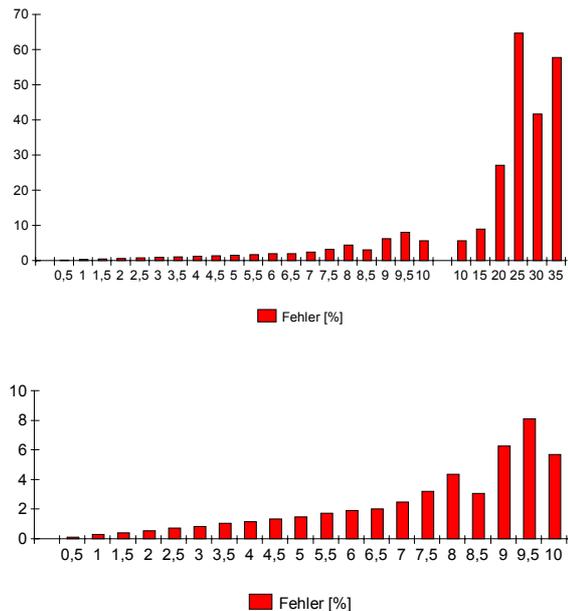
Wie groß darf der Zeitschritt denn sein, um möglichst keine Fehler zu machen ?

In einer Computersimulation wird man nie genau das gleiche Ergebnis erhalten, wie in der Realität. Trotzdem muss man einen "vernünftigen" Zeitschritt wählen können. Ein Symptom der Ungenauigkeiten ist die Abweichung der festgelegten Fadenlänge von der errechneten Entfernung des Pendelkörpers zur Aufhängung. Ich habe verschiedene Zeitschritte ausprobiert und (bei Normaleinstellungen) nach jeweils ca. 1200 Berechnungsschritten den maximal aufgetretenen Fehler ohne Korrektur bestimmt (siehe Tabelle A1a).

Zeitschritt [s]	Multiplikator	Fehler [m]	Zeit [ms]	Fehler [%]
0,0005	62664	0,000239372	0,5	0,11
0,001	27575	0,000543971	1	0,27
0,0015	18291	0,000820075	1,5	0,41
0,002	13443	0,001115822	2	0,55
0,0025	10399	0,001442446	2,5	0,72
0,003	8915	0,001682557	3	0,84
0,0035	7259	0,0020664	3,5	1,03
0,004	6551	0,002289727	4	1,14
0,0045	5615	0,002671416	4,5	1,33
0,005	5067	0,002960332	5	1,48
0,0055	4343	0,003453834	5,5	1,72
0,006	3918	0,003828484	6	1,91
0,0065	3722	0,004030091	6,5	2,01
0,007	3030	0,004950495	7	2,47
0,0075	2343	0,006402049	7,5	3,2
0,008	1719	0,008726003	8	4,36
0,0085	2467	0,006080259	8,5	3,04
0,009	1198	0,012520868	9	6,26
0,0095	925	0,016216216	9,5	8,1
0,01	1319	0,011372252	10	5,68
0,01	1319	0,011372252	10	5,68
0,015	834	0,017985612	15	8,99
0,02	276	0,054347826	20	27,17
0,025	116	0,129310345	25	64,65
0,03	180	0,083333333	30	41,66
0,035	130	0,115384615	35	57,69

Fadenlänge = konst = 0,2m Tabelle A1a

**Fehler in Abhängigkeit vom Zeitschritt**



Aufgrund dieser Diagramme scheint ein Zeitschritt von 0,003 Sekunden mit einer Abweichung von weniger als einem Prozent als guter Wert für Berechnungen, für langsamere Rechner empfiehlt sich ein Zeitschritt bis 0,008 Sekunden, mehr als 5% Fehler sollten Sie allerdings nicht in Kauf nehmen.

Über 0,005 Sekunden empfiehlt es sich, die Korrektur einzuschalten, um Programmabbrüche zu vermeiden.

Sprünge und Einbrüche in den Diagrammen (zum Beispiel bei 8,5ms) sind dadurch zu erklären, dass durch die verschiedenen auftretenden Fehler verschiedene Bahnkurven entstehen. Die Bahnkurven entscheiden aber möglicherweise maßgeblich, wie groß die (in kurzer Zeit) folgenden Fehler werden können.

## A2 Anmerkungen zur beiliegenden Diskette

Zu dieser Arbeit gehört eine Diskette mit dem Programm "Simulation eines Magnetpendels".

- Das Verzeichnis PROGRAMM:

Neben der Programmdatei SIMULATION.EXE finden sich noch einige Dateien \*.MPP (MPPaths), die Bahnen, die mit dem Programm errechnet wurden enthalten und jederzeit zur Analyse zur Verfügung stehen. Die Dateien \*.MPS (MPSettings) enthalten Einstellungen für die Simulationsumgebung, auf die im IV. Kapitel Bezug genommen wird.

Das Programm läuft unter Windows '98 (für Windows '95 finden Sie SIM95.EXE) und benötigt für viele Berechnungen einen schnellen Computer (K6 II, Pentium II mit mindestens 200 MHz empfohlen). Die Bildschirmauflösung sollte 1024x768 nicht unterschreiten und mindestens 256 Farben bieten (Umstellung in *Systemsteuerung - Anzeige*).

- Das Verzeichnis DATEN:

Hier finden Sie das Programmlisting des Programms "Simulation eines Magnetpendels". Dieses Programm ist ein Teil der Facharbeit.

Die Datei Listing.TXT enthält das Listing im Standard-Textformat, die anderen Dateien in diesem Verzeichnis sind Quelldateien für Delphi, sie enthalten andere für das Programm noch wichtige Informationen. Mit dem Standard-Delphi-Compiler besteht die Möglichkeit einer Neu-Compilierung.

Copyrightinweis:

Ohne ausdrückliche Erlaubnis des Autors Dominik Leiner darf das Programm "Simulation eines Magnetpendels" weder als Ganzes noch in Teilen oder in veränderter Form vervielfältigt, veröffentlicht oder auf irgendeine Weise kommerziell genutzt werden.

## A3 Zum realen Versuch

Oft wurde in den vorhergehenden Kapiteln erwähnt, wie sehr die Computersimulation einen Versuch vereinfacht. Einfachst zu berechnende Magnete, ideale Massepunkte, eine hundertprozentig starre Aufhängung - das alles sind Bedingungen, die sich in einem realen Versuch leider nicht verwirklichen lassen. Trotzdem wurde immer wieder darauf hingewiesen, dass auch ein echtes Magnetpendel im Prinzip das selbe chaotische Verhalten zeigt, wie das Pendel in der Computersimulation.

Um dieses zu überprüfen braucht man zuerst einmal einen Versuchsaufbau. Hier einige Hinweise, die sich in der Praxis als hilfreich erwiesen haben:

- Starke Magnete sind äußerst wichtig, speziell wenn das Pendel über einem Magnet stehen bleiben soll.
- Eine langer Faden (ca. 1,5 Meter) kann sorgt dafür, dass die Magnete im System die bestimmende Kraft bleiben und nicht die Gewichtskraft. Zudem schwingt das Pendel langsamer und läßt sich daher besser beobachten. Das Ergebnis wird durch einen leichten Pendelkörper nochmals verbessert.
- Der Pendelkörper sollte möglichst knapp über den Magneten schwingen, um eine größere Kraft zu erzeugen; deshalb darf der Pendelfaden aber kaum dehnbar sein. Ein dünner Draht erfüllt diese Aufgabe recht gut.

Um einen Versuchsverlauf weiter zu analysieren, muss man diesen filmen und anschließend die Informationen auf den Bahnverlauf reduzieren. Dafür gibt es die etwas arbeitsaufwendige, aber effektive Option *Bahn eingeben* auf der Karte *Analysen*.

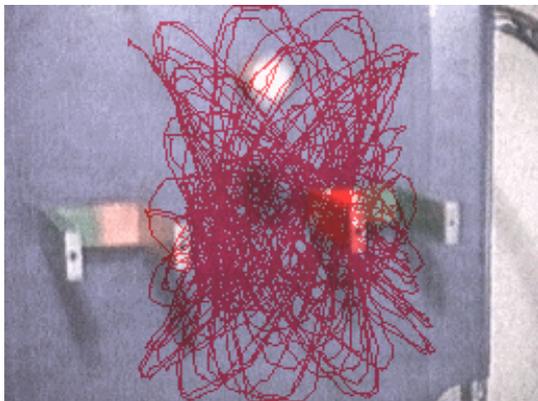
Je nach der Geschwindigkeit des Pendels muß die Anzahl der Aufzeichnungsschritte pro Sekunde individuell bestimmt werden, denn damit ändert sich die Qualität der aufgezeichneten Bahn.

Hier sehen Sie, wie solch ein Versuch aus dem Kamera-Perspektive aussehen kann (Bild A.3a), wie eine mit 22 Bildern pro Sekunde digitalisierte Bahn aussieht (Bild A.3b, gesamt ca. 3000 Punkte) und was der entsprechende Poincaré-Schnitt zeigt (Bild A.3c):



Bild A.3a

Die größte Schwäche an der Digitalisierung eines realen Versuchsergebnisses ist der große Zeitaufwand beim manuellen Eingeben der Pendelpositionen. Ein weiterer Nachteil ist die auftretende Ungenauigkeit, was eine leichte Zick-Zack-Bahn zur Folge hat. Natürlich ist in einem 320x240 Pixel - Raster auch die Auflösung wesentlich schlechter als mit extended-Variablen.



Eine Menge Argumente für einen Computerversuch, denn wie die nächste Seite zeigt, stimmen auch die Poincaré-Schnitte mit der Theorie überein.

Bild A.3b

Die Poincaré-Schnitte unten stammen alle von einer Bahn (Aufnahme <sup>Disk</sup>). Während das obere Bild, das den gesamten Versuch zeigt kaum Strukturen erkennen läßt, zeigt vor allem das mittlere Bild im Poincaré-Schnitt diese recht deutlich. Auch wenn die Abweichungen bereits sehr groß sind, gehört dieser Teil doch noch den quasiperiodischen Bahnen an. Der Rest der Bahn (unten) dagegen ist wesentlich chaotischer.

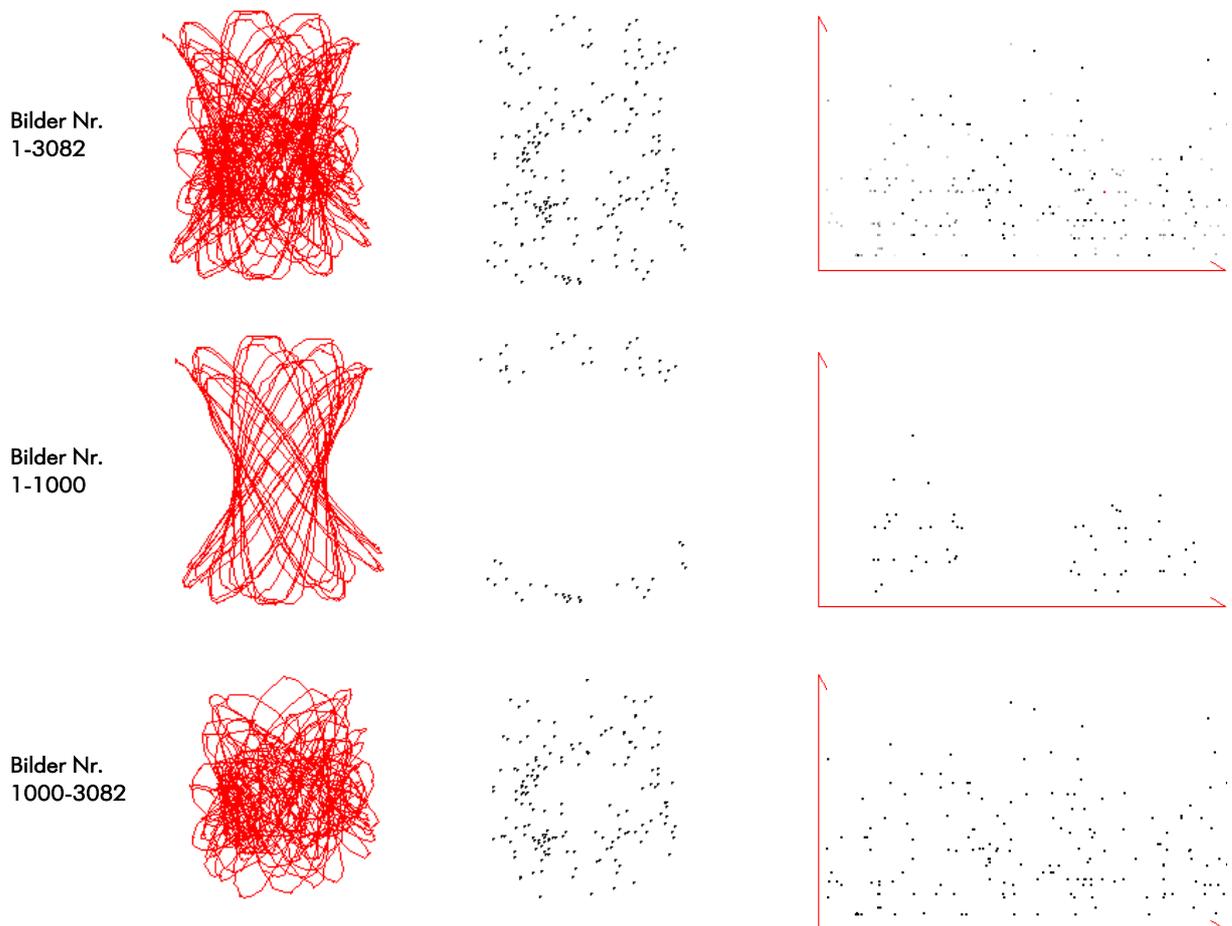


Bild A.3c - (Achsenbezeichnungen der Diagramme siehe Bild IV.3.2a)

Dass das Magnetpendel über verschiedenen Magneten zu stehen kommt, auch wenn man versucht, es immer wieder von der selben Stelle zu starten, das muss der Leser mir glauben - oder selbst ausprobieren...

## Anhang B - Quellen

Im Text sind Quellenverweise allgemein mit hochgestellten Abkürzungen angegeben, Seitenzahlen sind gegebenen Falls mit angegeben, zum Beispiel:

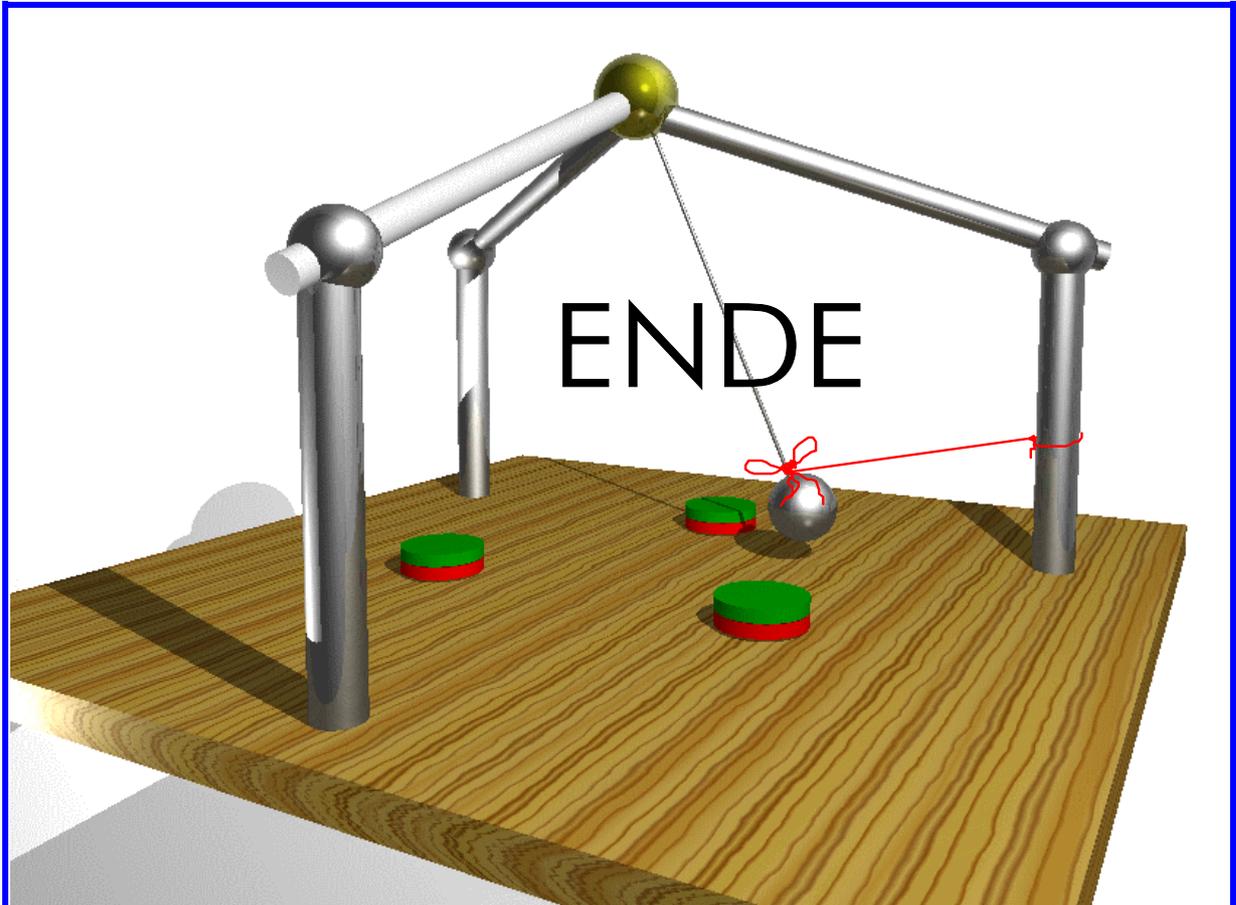
Text/Zitat <sup>Quelle</sup> Seiten a-b

Querverweise sind zum Teil in normaler Schriftgröße aufgeführt, zum Beispiel:

siehe auch Det Seite 1ff.

Die verwendeten Quellen in alphabetischer Reihenfolge ihrer Abkürzungen:

	<b>Buch/Zeitschrift</b>		<b>Erscheinungs- datum</b>	<b>Verlag</b>	<b>Verfasser</b>
<b>Cit</b>	Handreichungen für den Physikunterricht im Gymnasium "Computereinsatz im Physikunterricht"	Band 2	März 1996	Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München	
<b>Det</b>	Deterministisches Chaos, Wege in die nichtlineare Dynamik	Auflage 1993	1993	B.I. Wissenschaftsverlag	Roman Worg
<b>Fom</b>	Mathematische Formeln und Definitionen	6.Auflage	1998	Bayerischer Schulbuchverlag & Schaefer	Friedrich Pustet
<b>Mag</b>	Praxis der Naturwissenschaften Physik	Heft 8/44	01.12.1995	Aubis Verlag Deubner & Co KG	
<b>Pn1</b>	Praxis der Naturwissenschaften Physik	Heft 1/45	15.01.1996	Aubis Verlag Deubner & Co KG	
<b>Pn2</b>	Praxis der Naturwissenschaften Physik	Heft 7/36	15.10.1987	Aubis Verlag Deubner & Co KG	
<b>Ums</b>	Umsturz im Weltbild der Physik	Auflage 62-67 Tausend	1961	Carl Hanser Verlag	Ernst Zimmer
<b>Up1</b>	Naturwissenschaften im Unterricht Physik	Heft 36 6/96	12.1996	Klett Verlag	
<b>Disk</b>	Beiliegende Diskette, siehe auch Anhang A2				Dominik Leiner



Diese Facharbeit wurde von mir ohne fremde Hilfe und ausschließlich unter  
Zuhilfenahme der im Anhang B angegebenen Quellen angefertigt.

Bischofswiesen, den 30.11.98

.....  
Dominik Leiner